Tonelli, L.
La semicontinuità nel calcolo delle variazioni. (Italian) JFM 47.0472.01
Palermo Rend. 44, 167-249 (1920).

Sei A eine abgeschlossene Punktmenge der x, y-Ebene, und sei $F(x, y, x', y')$ eine für alle Punkte von A und alle Wertepaare x', y' (mit Ausnahme von $x' = y' = 0$) definierte, samt ihren partiellen Ableitungen der ersten zwei Ordnungen nach x' und y' stetige Funktion, die in bezug auf x' und y' positivhomogen vom ersten Grade ist. Mit $F_1(x, y, x', y')$ wird die bekannte Weierstraßsche Invariante von F bezeichnet. Für einen Teil der Untersuchungen muß auch vorausgesetzt werden, daß $F_{x'}, F_{y'}$ und F_1 stetige partielle Ableitungen nach x und y besitzen. Für jede in A verlaufende rektifizierbare Kurve $C : x = x(s), y = y(s)$ (wo s die Bogenlänge bedeutet) existiert dann das Lebesguesche Integral: $I_C = \int_C F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))ds$, und stellt somit eine Funktion des Kurvenbogens C dar. Sie heißt unterhalb stetig auf C_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ gehört, so daß für jede zu A gehörige Kurve C, die so umkehrbar eindeutig (unter Erhaltung der Anordnung) auf C_0 bezogen werden kann, daß entsprechende Punkte einen Abstand $< \varrho$ haben, die Ungleichung gilt: $y_C > y_{C_0} - \varepsilon$.

Ist $F_1(x, yx', y') > 0$ für alle x, y von A und alle x', y', aber verschwindet F_1 in keinem Punkte von A für alle x', y', so ist I_C auf jeder Kurve C von A unterhalb stetig. Dies gilt auch noch, wenn es Punkte gibt, in denen F_1 für alle x', y' verschwindet, vorausgesetzt, daß jeder solche Punkt eine Umgebung besitzt, in der $F > 0$ ist für alle x', y'. Ist $F_1 = 0$ in ganz A für alle x', y', so ist F linear in x', y' :

$$F = P(x, y)x' + Q(x, y)y'.$$

Dann ist I_C auf jeder ganz im Inneren von A verlaufenden Kurve C eine stetige Funktion, falls $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Daraus folgt: Ist $F_1 \geqq 0$ in ganz A, und können zu jedem Punkte, in dem F_1 für alle x', y' verschwindet, $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ so bestimmt werden, daß in einer Umgebung dieses Punktes:

$$F'(x, y, x', y') + P(x, y)x' + Q(x, y)y' \geqq 0$$

ist für alle x', y', und daß $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ so ist I_C unterhalb stetig auf jeder im Innern von A verlaufenden Kurve C. – Beschränkt man sich auf Kurven, deren Länge unterhalb einer endlichen Schranke liegen, so ist die Bedingung $F_1 \geqq 0$ allein hinreichend dafür, daß I_C unterhalb stetig ist. Im Falle $F_1 = 0$ ist dann I_C stetig.

Sei nun C_0 eine gegebene Kurve aus A; wo sie eine Tangente besitzt, sei ϑ_0 der Winkel, den diese Tangente mit der x-Achse bildet. Damit I_C unterhalb stetig sei auf C_0, ist hinreichend, daß folgende Bedingungen gelten:

a) In jedem Punkte x_0, y_0, in dem C_0 eine Tangente besitzt, ist:

$$E(x_0, y_0, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta) > 0$$

für alle $\vartheta \neq \vartheta_0$.

b) In jedem anderen Punkte x_0, y_0 von C_0 gibt es eine Richtung ϑ^*, so daß:

$$E(x_0, y_0, \cos\vartheta^*, \sin\vartheta^*, \cos\vartheta, \sin\vartheta) > 0$$

für alle $\vartheta \neq \vartheta^*$.

Damit auf jeder Kurve von A das Integral I_C unterhalb stetig sei, ist notwendig, daß in allen Punkten von A für alle x', y' gelte: $F_1 \geqq 0$. Damit auf jeder ganz im Innern von A verlaufenden Kurve I_C unterhalb stetig sei, ist außerdem notwendig, daß in jedem inneren Punkte von A, in dem $F_1 = 0$ ist für alle x' und y', die Beziehung gelte: $F_{x'y} = F_{y'x}$. – Damit auf einer gegebenen ganz im Innern von A verlaufenden Kurve C_0, die überall eine stetig veränderliche Tangente besitzt, I_C unterhalb stetig sei, ist notwendig, daß auf C_0 überall $F_1(x, y, cos\vartheta_0, sin\vartheta_0) \geqq 0$ sei, wo ϑ_0 den Winkel bezeichnet, den die Tangente mit der x-Achse bildet Besitzt C_0 nicht überall eine sich stetig ändernde Tangente, so ist es nur notwendig, daß $F_1(x, y, \cos\vartheta_0, \sin h_0) \geqq 0$ sei auf C_0 abgesehen von einer Nullmenge. In diesen Bedingungen kann die

Ungleichung $F_1 \geqq 0$ ersetzt werden durch: $E(x, y, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta) \geqq 0$ für alle ϑ.

Sei nun $f(x, y, y')$ eine für alle Punkte von A und alle y' definierte, samt ihren partiellen Ableitungen $f_{y'}, f_{y'y'}, f_{y'x}$ stetige Funktion. Unter C sind nun Kurven $y = y(x)$ zu verstehen, wo $y(x)$ eine totalstetige Funktion ist, und für die das Lebesguesche Integral $y = \int_1^b f(x, y(x), y'(x))dx$ existiert. Im linearen Falle $f(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'$ ist hier I_C stets eine stetige Funktion von C, falls P, Q und $\frac{\partial Q}{\partial x}$ stetig sind (die Stetigkeit von P und Q reicht dazu nicht aus). Ist $f_{y'y'} \geqq 0$ in ganz A für alle y', so ist I_C auf jeder Kurve C von A unterhalb stetig. Damit auf einer gegebenen Kurve C_0 von A das Integral I_C unterhalb stetig sei, ist hinreichend, daß die Bedingungen erfüllt seien (wobei $y = y_0(x)$ die Gleichung von C_0 bedeutet):

a) Zu jedem Punkte x von C_0, in dem eine endliche Ableitung $y_0'(\bar{x})$ vorhanden ist, gibt es ein $\varrho(\bar{x}) > 0$, so daß für alle den Ungleichungen:

$$|x - \bar{x}| \leqq \varrho(\bar{x});\ \bar{y} - y_0(\bar{x})| \leqq \varrho(\bar{x});\ |y' - y_0'(\bar{x})| \leqq \varrho(\bar{x})$$

genügenden und zu A gehörigen x, y, y' und für alle

$\hat{y}' \neq \bar{y}'$ gelte: $E(x, y, y', \hat{y}') > 0$.

b) Zu jedem Punkte $\bar{x}$ von C_0 in dem keine endliche Ableitung vorhanden ist, gibt es ein $\varrho(\bar{x}) > 0$ und ein $\bar{y}'$, so daß für alle den Ungleichungen:

$$|x - \bar{x}| \leqq \varrho(\bar{x});\ |y - y_0(\bar{x})| \leqq \varrho(\bar{x});\ |y' - \bar{y}| \leqq \varrho(\bar{x})$$

genügenden und zu A gehörigen x, y, y' und für alle

$\hat{y}' \neq \bar{y}'$ gelte: $E(x, y, y', \hat{y}') > 0$.

Damit I_C auf jeder Kurve von A unterhalb stetig sei, ist notwendig, daß in allen Punkten von $A f_{y'y'}(x, y, y') \geqq 0$ sei für alle y'. Damit auf einer gegebenen, ganz im Innern von A verlaufenden Kurve $y = y_0(x)$, die überall eine stetig veränderliche Tangente besitzt, I_C unterhalb stetig sei, ist notwendig, daß auf ihr überall $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0(x)) \geqq 0$ sei. Besitzt die Kurve nicht überall eine sich stetig ändernde Tangente, so ist es nur notwendig, daß $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0(x)) \geqq 0$ sei; abgesehen von einer Nullmenge. In diesen Bedingungen kann die Ungleichung $f_{y'y'} \geqq 0$ auch ersetzt werden durch $E(x, y_0(x), y_0(x), y') \geqq 0$ für alle y'.

Diese Resultate sind bedeutungsvoll, weil sie die eigentliche Quelle der Logendreschen und der Weierstraßschen Bedingung in der Variationsrechnung deutlich erkennen lassen.

Reviewer: Hahn, Prof. (Wien)

Full Text: DOI

References:

[1] L. Tonelli,Sui massimi e minimi assoluti del Calcolo delle Variazioni [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXII (2{\(\deg\)} semestre 1911), pp. 297–337] ; Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioui [Ibidem; t. XXXV (1{\(\deg\)} semestre 1913), pp. 49–73]. · Zbl 42.0400.01 · doi:10.1007/BF03014804

[2] E. Goursat,Sur quelques fonctions de lignes semi-continues [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XLIII, fasc. II (1915), pp. 118–130]. · Zbl 45.1326.01 · doi:10.24033/bsmf.955

[3] L. Tonelli,Sur une méthode directe du Calcul des Variations [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXIX (1{\(\deg\)} semestre 1915), pp. 233–264]. · Zbl 45.0615.02 · doi:10.1007/BF03015981

[4] Questo lemma fu già dimostrato, in condizioni più génerale da un lato e più restrittive da un altro, in loc. cit. 4), pp. 241–243.

[5] E. Landau,Ueber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion [Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, t. XXV (1908), pp. 337–345];Ch. J. de la Vallée Poussin, Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites limitées deFourier (Bulletins de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1908, pp. 193–254) ;F. Riesz, Ueber die Approximation einer Funktion durch Polynome [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XVII (1908), pp. 196–211]. · Zbl 39.0472.02 · doi:10.1007/BF03029135

[6] Cfr.O. Bolza,Lectures on the Calculus of Variations (Chicago, University of Chicago Press., 1904, p. 141).

[7] Cfr. loc. cit. 1), p. 302.

[8] II Goursat [loc. cit. 2), n3] nel dimostrare. · Zbl 45.1326.01 · doi:10.24033/bsmf.955

[9] Cfr.Ch. De la Vallée Poussin,Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes deBaire (Paris, Gauthier-Villars, 1916);

pp. 13–14.

[10] Cfr.Ch. De la Vallée Poussin,Cours d'Analyse Infinitésimale, 2me édit., t. II (Lonvain, A. Uystprayrt, Dieudonné, 1912); p. 125.

[11] Cfr.A. Pringsheim,Der Cauchy-Goursatsche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale (Sitzungsberichte der mthem.-phys. Klasse der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXIII, 1903, pp. 673–682).

[12] V. L. Tonelli,Successioni di curve e derivazione per serie (Rend, della R. Accademia dei Lincei, vol. XXV, 1{\(\deg\)} semestre 1916, pp. 22–30), n6. · Zbl 46.0430.01

[13] Cfr. loc. cit. 30).

[14] Cfr.G. Vitali,Sulle funzioni integrait [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XL (1904–1905), pp. 1021–1034].

[15] Cfr.L. Tonelli,Successioni di curve e derivazioni per serie Nota II (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXV, 1{\(\deg\)} semestre 1916, pp. 85–91).

Cfr. loc. cit. 4), pp. 233–264). · Zbl 45.0615.02 · doi:10.1007/BF03015981

[16] loc. cit. 18).

[17] loc. cit. 35).