Hahn, H.

Theorie der reellen Funktionen. Erster Band. (German) JFM 48.0261.09

Berlin: J. Springer, VII u. 600 S. 8° (1921).

Das vorliegende, auf zwei Bände berechnete Werk war ursprünglich als eine Fortsetzung des Berichtes von A. Schönflies, "Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten" gedacht. Die Zeitumstände haben eine Änderung des Planes bedingt, und so ist ein selbständiges, auch von dem mittlerweile erschienenen Buch von Carathéodory ("Reelle Funktionen", F. d. M. 46, 376 (JFM 46.0376.*), 1916-18) in der Anlage und der Durchführung wesentlich verschiedenes Werk entstanden. Der erste Band bildet, auch für sich betrachtet, ein Ganzes und gibt nach einer mengentheoretischen Vorbereitung in erster Linie eine allseitige Behandlung der Begriffe: Funktion, Stetigkeit und Meßbarkeit. Der zweite Band soll die Theorie der Integration und Differentiation, die analytische Darstellung willkürlicher Funktionen und die Fourierschen Reihen enthalten. Angefangen wird mit den einfachsten Begriffen der allgemeinen Mengenlehre: Vereinigung und Durchschnitt, Mächtigkeit. Es geht rasch vorwärts: Ordnungstypen, Ordnungszahlen. Auf S. 25 wird der Zermelosche Wohlordnungssatz bewiesen, S. 26 bringt als die unmittelbare Folgerung den Satz von der Vergleichbarkeit zweier beliebigen Mächtigkeiten. Auf S. 27 kommen wir zu den reellen Zahlen. Die Definition einer reellen Zahl wie auch elementare Rechenoperationen mit diesen werden als bekannt vorausgesetzt. Neu entwickelt finden sich Sätze über Grenz- und Häufungswerte reeller Zahlen, Ordnungstypen η, $\varkappa$, $\imath$. I. Kapitel. Punktmengen (S. 52-112). Metrische Räume; der allgemeine Grenzbegriff in metrischer und topologischer Definition. Der Verf. hält in seiner Darstellung konsequent am metrischen Grenzbegriff fest. Kompakte, abgeschlossene, offene Punktmengen. Umgebungen, in sich dichte, dichte, nirgends dichte, zusammenhängende Mengen. Folgt eine sehr eingehende Behandlung des Borelschen Theorems. Wir finden hier (S. 89) mit W. Groß den Satz bewiesen: "Ist jedem Punkte a der kompakten, abgeschlossenen Menge $\mathfrak{A}$ eine Menge $\mathfrak{B}_a$ zugeordnet, von der a innerer Punkt ist, so gibt es unter den Mengen $\mathfrak{B}_a$ endlich viele (*) $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$,..., $\mathfrak{B}^{(n)}$, sodaß jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ innerer Punkt mindestens einer der Mengen (*) ist." Auf S. 91 wird mit W. Groß der Satz (das "verallgemeinerte Borelsche Theorem") bewiesen: "Ist jedem Punkte a der separablen Menge $\mathfrak{A}$ eine Menge $\mathfrak{B}_a$ zugeordnet, von der a innerer Punkt ist, so gibt es unter den Mengen $\mathfrak{B}_a$ abzählbar viele: (†) $\mathfrak{B}^{(1)}$,..., $\mathfrak{B}^{(n)}$,..., so daß jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ innerer Punkt mindestens einer der Mengen (†) ist." (Eine Menge heißt nach M. Fréchet separabel, wenn es in ihr dichte, abzählbare Mengen gibt.) Separable, vollständige, lineare, abgeschlossene Mengen. II. Kapitel. Der Begriff der Stetigkeit und seine Verallgemeinerungen (S. 113-183). Funktion auf einer Menge $\mathfrak{A}$ irgendwelcher Elemente, obere und untere Schrankenfunktion $G(f;a,\mathfrak{A})$, $g(f;a,\mathfrak{A})$, Stetigkeit in einem Punkte und auf einer Punktmenge, gleichmäßige Stetigkeit. "Ist $\mathfrak{A}$ kompakt und abgeschlossen, so ist jede auf $\mathfrak{A}$ stetige Funktion auch gleichmäßig stetig auf $\mathfrak{A}$" (S. 131-133). "Ist $\mathfrak{B}$ ein auf $\mathfrak{A}$ dichter Teil von $\mathfrak{A}$, so ist, damit die auf $\mathfrak{B}$ gegebene Funktion f sich zu einer auf $\mathfrak{A}$ stetigen Funktion erweitern lasse, notwendig und hinreichend, daß in jedem Punkte a von $\mathfrak{A}$: $G(a;f,\mathfrak{B}) = g(a;f,\mathfrak{B})$" (Baire, S. 135-136). Stetige Abbildungen in metrischen Räumen. "Ist $\mathfrak{A}$ kompakt und abgeschlossen und ist A eine eineindeutige stetige Abbildung von $\mathfrak{A}$, so ist auch A^{-1} stetig" (S. 146). Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat. Halbstetigkeit in einem Punkt und auf einer Punktmenge. "Jede auf $\mathfrak{A}$ oberhalb stetige Funktion ist Grenzfunktion einer monoton abnehmenden Folge auf $\mathfrak{A}$ stetiger Funktionen, jede auf $\mathfrak{A}$ unterhalb stetige Funktion ist Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge auf $\mathfrak{A}$ stetiger Funktionen" (Baire, S. 162). Die Schrankenfunktionen sind halbstetig auf der abgeschlossenen Hülle $\mathfrak{A}^0$ von $\mathfrak{A}$. Einseitige Stetigkeit und Halbstetigkeit der Funktionen in $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{R}_1$. Drittes Kapitel. Die unstetigen Funktionen (S. 184-229). Häufungswerte, Schwankungen einer Funktion $\omega(a;f,\mathfrak{A})$. "Ist in allen Punkten von $\mathfrak{A}$: $\omega(a;f,\mathfrak{A}) \leqq q$, so kann f zerspaltet werden in zwei Summanden, $f = f_1 + f_2$, deren einer f_1 stetig ist auf $\mathfrak{A}$, während der andere der Ungleichung genügt: $|f_2| \leqq \frac{q}{2}$" (Baire und, in endgültiger Fassung, Hahn, S. 195). Verteilung der Unstetigkeitspunkte. Total unstetige und punktweise unstetige Funktionen. (Fortsetzung) Erweiterung punktweise unstetiger Funktionen. Beispiele. Viele Verallgemeinerungen (XIX Sätze) im Kleindruck. Viertes Kapitel. Funktionenfolgen (S. 230 bis 316). Obere und untere Grenzfunktion einer Funktionenfolge $\{f_\nu\}$. Konvergenz- und Oszillationspunkte. Maximal- und Minimalfunktionen von $\{f_\nu\}$ (C. A. Dell' Agnola). Stetige Konvergenz und halbstetige Oszillation. Gleichmäßige Konvergenz und Oszillation. Schwankung und Ungleichmäßigkeitsgrad einer Funktionenfolge. Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz. Punktweise ungleichmäßige Konvergenz. Einfach gleichmäßige und quasi-gleichmäßige Konvergenz. Vertauschung von Grenzübergängen. Gleichgradig stetige Funktionenmengen (fonctions également continues, Ascoli). Schranken- und Grenzfunktionen einer Funktionenmenge: Verdichtung von Singularitäten. Fünftes Kapitel. Die Baireschen Funktionen (S. 318-392). Funktionen α-ter Klasse (α endliche oder transfinite Zahl der ersten oder zweiten Zahlklasse auf $\mathfrak{A}$). "Ist $\mathfrak{A}$ separabel, so hat die Menge aller Baireschen Funktionen auf $\mathfrak{A}$ die Mächtigkeit c." "Auf einer separablen Menge $\mathfrak{A}$ der Mächtigkeit c gibt es Funktionen, die nicht Bairesche Funktionen sind." Eigenschaften, die bei Grenzübergang erhalten bleiben. "Jede Bairesche Funktion auf einer separablen relativ-vollständigen Menge $\mathfrak{A}$ ist punktweise unstetig auf jedem abgeschlossenen Teile $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ bei Vernachlässigung von Teilen erster Kategorie von $\mathfrak{A}'$" (S. 327). Bei der Bildung Bairescher Funktionen kann man sich auf monotone Grenzübergänge beschränken (S. 328 u. ff.). Ordnung einer Baireschen Funktion. Borelsche Mengen. Zusammenhang zwischen Klasse und Ordnung einer Baireschen Funktion. Beides, Klasse wie Ordnung, lassen sich durch Borelsche Mengen charakterisieren. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine auf $\mathfrak{A}$ endliche Funktion von höchstens α-ter Klasse ist ($\alpha \geqq 1$). Verhalten Bairescher Funktionen in der Umgebung eines Punktes. Spezielles über Funktionen erster, zweiter und dritter Klasse. Existenz von Funktionen α-ter Klasse. Unvollständige Bairesche Funktionen. Funktionen mehrerer Punkte. Sechstes Kapitel. Die absolut-additiven Mengenfunktionen (S. 393-464). Additive und absolut additive Mengenfunktionen. Positiv-, Negativ-, Absolut-Funktion. Stetige und unstetige Mengenfunktionen. Totalstetige Mengenfunktionen. Es folgt eine im wesentlichen von Carathéodory (Gött. Nachr. 1914, 404; F. d. M. 45, 443 (JFM 45.0443.*)) herrührende Theorie der Meßfunktionen und der Meßbarkeit ; gewöhnliche und reguläre Meßfunktionen, Inhaltsfunktionen, Inhaltsfunktionen in $\mathfrak{R}_k$. Absolut additive Mengenfunktionen in $\mathfrak{R}_k$. Siebentes Kapitel. Die Funktionen endlicher Variation (S. 465-547). Absolutzuwachs, Positivzuwachs, Negativzuwachs einer Funktion in $\mathfrak{R}_k$: Funktionen absolutstetigen Absolutzuwachses. Ausgezeichnete Folgen von Intervallsystemen. – Variation, positive und negative Variation einer Funktion einer reellen Veränderlichen $f(x)$. Funktionen endlicher Variation (Jordan). Stetige und unstetige Funktionen endlicher Variation. Rektifikation. Länge eines stetigen Kurvenbogens. Totalstetige Funktionen einer reellen Variablen. Die Funktion der Singularitäten. Streckenweise konstante Funktionen. Funktionen endlicher Variation in $\mathfrak{R}_k$. Achtes Kapitel. Die meßbaren Funktionen (S. 548-589). Folgen meßbarer Funktionen. Asymptotische Konvergenz. Nicht-meßbare Punktmengen. Nichtmeßbare Funktionen. Meßbare und reguläre Abbildungen.

Wir haben in dem Vorstehenden versucht, auch durch gelegentliche genaue Wiedergabe einiger Sätze eine Vorstellung von dem Inhalt und dem Charakter des Werkes zu vermitteln. Es ist ein Buch, das bis in die neuesten, feinsten Verästelungen der Theorie hinführt. Die angegebene Seitenzahl (600) gibt keinen genauen Einblick in den materiellen Umfang des dargebotenen Stoffes, da viele ins Speziellere gehende Betrachtungen im Kleindruck gesetzt sind. Der Stoff ist durchaus einheitlich verarbeitet und mit großer Klarheit dargestellt. Vieles ist des Verf. eigenes Werk, in den früheren Arbeiten wie in der vorliegenden Darstellung. Reichhaltige, in den Fußnoten verstreute Literaturhinweise erleichtern die Übersicht. Wir schließen mit dem Ausdruck des Dankes für das verdienstvolle Werk und dem Wunsch, es möchte dem Verf. gelingen, auch den zweiten Band seines großen Unternehmens recht bald der Öffentlichkeit zu übergeben.

Reviewer: Lichtenstein, Prof. (Leipzig)

Full Text: Link