Löwner, K.
Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. (German)
JFM 49.0714.01
Math. Ann. 89, 103-121 (1923).

Es heiße eine Abbildung $w = f(z)$ des Einheitskreises $|z| < 1$ kurz beschränkt, falls $f(z)$ daselbst regulär, schlicht, $\not\equiv z$, dem Betrage nach < 1 und derart ist, daß $f(0) = 0$ und $\beta = f'(0) > 0$ (also $0 < \beta < 1$). Mit $w = f_1(z)$ und $w = f_2(z)$ ist auch die Zusammensetzung $w = f_1(f_2(z))$ beschränkt. Diese Bemerkung läßt die folgende Umkehrung zu. Ist eine beschränkte Abbildung $w = f(z)$ und ein System von n positiven Zahlen $\beta_\nu < 1$ vorgelegt, so gibt es (und zwar auf unendlich vielen Arten) ein System von n beschränkten Abbildungen

$$w = f_\nu(z),\ \nu = 1, 2, \dots, n \text{ mit } \beta_\nu = f'_\nu(0)$$

derart, daß $f(z) \equiv f_1(f_2(\dots(f_n(z))\dots))$, falls nur die hierzu notwendige Bedingung $f'(0) = f'_1(0) \cdot f'_2(0) \dots f'_n(0)$ erfüllt ist. Der Beweis, der im wesentlichen auf den Fall reduziert werden kann, wo das Bild von $|z| < 1$ ein Jordangebiet ist, beruht einerseits auf dem Umstand, daß das Bild eine (echte) Teilmenge des Kreises $|w| < 1$ ist (die Identität ist nämlich ausgeschlossen) und andererseits darauf, daß $f(z) \to z$ gilt für $\beta \to 1$; es folgt nämlich aus dem Schwarzschen Lemma die Abschätzung

$$\left|\frac{f(z)}{z} - \beta\right| \leqq \frac{(1-\beta^2)|z|}{1-|z|\beta}.$$

– Es werden sodann "infinitesimale" beschränkte Abbildungen betrachtet. Es sei $w = f(z;t)$ eine bei jedem t, $0 < t \leqq t_0$, erklärte beschränkte Abbildung, welche gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen und außerdem der Anfangsbedingung $f(z;t) \to z$, $t \to 0$ genügt und man setze $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0} = V(z)$. Eine beschränkte Abbildung $w = V(z)$ heißt infinitesimal, wenn sie aus einer Abbildungsschar $w = f(z,t)$ auf diese Weise abgeleitet werden kann. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß für $|z| < 1$ die Funktion $p(z) = -z^{-1}V(z)$ regulär, ihr Realteil $\geqq 0$ und $p(0)$ reell ist. – Es wird nun die zur vorigen analoge, jedoch wesentlich kompliziertere Frage behandelt, ob sich jede beschränkte Abbildung aus infinitesimalen "zusammensetzen" läßt, genauer, ob es möglich ist, eine Funktion $p = p(w,t)$ derart zu bestimmen, daß die der Anfangsbedingung $f(z;0) = z$ genügende Lösung $w = f(z;t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dt} = -w \cdot p(w,t)$$

für $t \to t_0$ in die gegebene Abbildungsfunktion übergeht. Es wird bewiesen, daß die Frage bei Schlitzabbildungen gewiß zu bejahen ist und daß die so erzeugten Abbildungen zur beliebig genauen Approximation von beliebigen beschränkten Abbildungen hinreichend sind. Bei Schlitzbereichen kann

$$p = \frac{1 + \varkappa(t)w}{1 - \varkappa(t)w}$$

gesetzt werden, wobei $\varkappa(t)$ eine eindeutig bestimmte stetige Funktion vom Betrage 1 ist. Diese Normaldarstellung kann zu Koeffizientenabschätzungen herangezogen werden. Aus den zu diesem Zwecke entwickelten Formeln werden Folgerungen gezogen in bezug auf die Klasse derjenigen Potenzreihen $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_1 = 1$, welche für $|z| < 1$ regulär und schlicht sind. Es wird nämlich die Richtigkeit der von Bieberbach für den Fall $n = 2$ bewiesenen Vermutung $|c_n| \leqq n$ auch für $n = 3$ bestätigt; es wird ferner gezeigt, daß, falls $z = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n w^n$ die zu $w = F(z)$ inverse Abbildung bezeichnet, bei jedem n die Abschätzung

$$|\omega_{n+1}| \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{1 \cdot 2 \dots (n+2)} \cdot 2^{n+1}$$

besteht. Das Gleichheitszeichen gilt beidemal dann und nur dann, wenn

$$F(z) = \frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}; \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Reviewer: Wintner, A., Dr. (Leipzig)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Siehe insbesondere Pick, G.: Leipz. Ber. 1916, S. 58-64 und Wien. Ber. 1917, Abtlg IIa,126, S. 247-263; Bieberbach, L.: Sitzber, kgl. Akad. Berlin 1916, S. 940-955; Faber, G.: Münch. Ber. 1916, S. 39-42 und 1920, S. 49-64.

[2] Siehe die in1) zit. Arbeit von L. Bieberbach. Bieberbach, L.: Sitzber. kgl. Akad. Berlin 1916, S. 940-955;

[3] Vgl. Carathéodory, C.: Math. Ann.72, S. 107 ff.; Bieberbach, L.: Gött. Nachr. 1913, S. 1-9.

[4] Vgl. etwa K. Löwner: Leipz. Ber. 1917, S. 8.

[5] Vgl. zu diesem Paragraphen die in1) zit. Arbeit v. L. Bieberbach. Bieberbach, L.: Sitzber. kgl. Akad. Berlin 1916, S. 940-955;

[6] Pick, G.: Wien. Ber.126, Abtlg. IIa (1917), S. 247-263.

[7] Vgl. die in1) zit. Arbeit. Bieberbach, L: Sitzber. kgl. Akad. Berlin 1916, S. 940-955;