Study, E.

Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. III, IV. (German) JFM 51.0588.03

Math. Z. 21, 45-71 (1924); 21, 174-194 (1924).

Das "Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen" besteht bekanntlich [Math. Z. 18, 55–86, 201–229 (1923; JFM 49.0075.01)] in einer vom Verf. mit erschöpfender Gründlichkeit entwickelten Theorie von Linear- und Bilinearformen, deren Argumente Quaternionen sind, des Kalküls sowohl wie auch seiner geometrischen Deutung bzw. Anwendung. Im "linearen" Kalkül war bereits in Teil I als wesentliches Hilfsmittel die "Nablafunktion" $\nabla = \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix} = p\tilde{p}\cdot s\tilde{s} - p\tilde{r}s\tilde{q} - q\tilde{s}r\tilde{p} + q\tilde{q}\cdot r\tilde{r}$ eingeführt worden. (Verf. bezeichnet mit $\tilde{z} = (z_0,\, -z_1,\, -z_2,\, -z_3)$ die zu $z = (z_0,\, z_1,\, z_2,\, z_3)$ konjugierte Quaternion.) Ihr Nichtverschwinden ist notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer eindeutig umkehrbaren linearen Zuordnung zweier Quaternionenpaare x, y und ξ, η zu zwei anderen: x', y' und ξ', η'. Beide Transformationen sind dann durch die Quaternionenmatrix $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ bestimmt. Die grundlegende Gruppe $\mathit{\Gamma}_{15}$ aller eigentlichen Möbiustransformationen der Untersuchung ist mit Berücksichtigung der nichtkommutativen Multiplikation in der Form: $\dfrac{az+b}{cz+d} = z'$ bzw. $\dfrac{z\alpha+\beta}{z\gamma+\delta} = z'$ gegeben; für die Nablafunktionen der "verschwisterten" Quaternionenmatrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ gilt: $\nabla_l \cdot \nabla_r = 1$.

Durch Übergang zu konjugierten Quaternionen erhält man die Nebenschicht $\mathbf{H}_{15}$, woran sich die Terminologie der eigentlichen (aus $\mathit{\Gamma}_{15}$) bzw. uneigentlichen (aus $\mathbf{H}_{15}$) Möbiustransformationen schließt. Die Gruppe $\mathit{\Gamma}_{15}$, $\mathbf{H}_{15}$ "induziert" mit Hilfe der stereographischen Projektion einer (regulären) M_4^2 des (projektiven) R_5:

$$Z_\alpha^2 - Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - Z_\omega^2 = 0 \ \text{ bzw. } \ Z_\alpha - Z\widetilde{Z} - Z_\omega^2 = 0$$

aus dem Punkt mit den cartesischen Koordinaten $(0,0,0,0,-1)$ die Gruppe G_{15}, H_{15} aller reellen kollinearen automorphen Transformationen der "sphärischen" M_4^2. (Die Zuordnung ist nur im reellen Gebiet eindeutig umkehrbar.) Nach diesen Entwicklungen werden in Teil II die involutorischen Transformationen in G_{15}, H_{15} bzw. $\mathit{\Gamma}_{15}$, $\mathbf{H}_{15}$ untersucht.

Für die Aufgaben, welche sich Verf. in Teil III und IV stellt, bedarf es eines Ausbaues des "bilinearen" Quaternionenkalküls. Auch dieser wurde bereits in Teil II durchgeführt. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Theorie der Bilinearbzw. Quasibilinearformen:

$$\begin{aligned} T &= \tilde{x}_1\tilde{a}\tilde{v}_2 + \tilde{x}_2\tilde{b}\tilde{v}_2\tilde{x}_1\tilde{c}v_1 - \tilde{x}_2\tilde{d}\tilde{v}_1, \\ \mathbf{T} &= u_1\alpha y_2 + u_2\beta y_2 - u_1\gamma y_1 - u_2\delta y_1, \\ \Sigma &= u_1\tilde{l}\tilde{v}_2 + u_2\tilde{m}\tilde{v}_2 u_1\tilde{n}\tilde{v}_1 - u_2\tilde{r}\tilde{v}_1, \\ S &= \tilde{x}_1\lambda y_2 + \tilde{x}_2\mu y_2 - \tilde{x}_1\nu y_1 - \tilde{x}_2\varrho y_1. \end{aligned}$$

Der Inbegriff aller Zuordnungen $(x_1,x_2) \to (x_1'x_2')$, $(u_1,u_2) \to (u_1',u_2')$, $(x_1,x_2) \to (u_1',u_2')$, $(u_1,u_2) \to (x_1',x_2')$, d. h. aller "Kollineationen" und "Korrelationen", vermittelt durch $\mathfrak{T} = (T,\mathbf{T})$ und $\mathfrak{S} = (S,\Sigma)$, bildet eine (geschichtete) Gruppe $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{H}$), deren allgemeine Transformation (aus $\mathfrak{G}_{16}$ oder $\mathfrak{H}_{16}$) von 16 Parametern abhängt. Zu ihr sind die früher betrachteten Gruppen G_{15}, H_{15} und $\mathit{\Gamma}_{15}$, $\mathbf{H}_{15}$ meromorph. Mit diesen und verwandten Hilfsmitteln behandelt Verf. in Teil III neuerdings die uneigentlichen konformen Transformationen. Von den zahlreichen Ergebnissen seien erwähnt: Jeder reellen eigentlichen automorphen konformen Transformation einer idealen Sphäre, d.i. jeder reellen Bewegung im vierdimensionalen sphärischen Räume, läßt sich ein Paar verschwisterter reeller Formen $T\mathbf{T}$ (oder $-T$,$-\mathbf{T}$) zuordnen, das mit den zur Sphäre gehörigen Formen S, Σ durch die Gleichungen

$$S\mathbf{T} = TS, \quad \Sigma T = \mathbf{T}\Sigma$$

verbunden ist. Bei einer reellen eigentlichen automorphen Möbiusschen Transformation einer realen Sphäre, d. h. bei einer reellen Bewegung im vierdimensionalen pseudosphärischen Raume sind dagegen zwei Fälle zu unterscheiden: je nachdem die automorphe Transformation oder Bewegung "zugänglich" ist oder nicht, d. h. je nachdem die von der Sphäre abgeschiedenen Teilräume des R_4 bei der Transformation einzeln in Ruhe bleiben oder vertauscht werden.

Die automorphen eigentlichen Transformationen eines irreduziblen Kreises bilden eine sechsgliedrige analytische Gruppe $\mathit{\Gamma}_6$. Verf. untersucht ihre beiden invarianten dreigliedrigen analytischen Untergruppen $\mathit{\Gamma}_3^L$ und $\mathit{\Gamma}_3^R$, ihre Holomorphien $(\mathfrak{G}_6, \mathfrak{G}_3^L, \mathfrak{G}_3^R)$ sowie den Fall einer reellen $\mathit{\Gamma}_6$. Schließt man involutorische Transformationen durch die Forderung einer nichtverschwindenden Diskriminante der charakteristischen Gleichung sechsten Grades einer automorphen Kollineation der M_4^2 in R_5 aus, so führt die Untersuchung der "Inzidenzpunkte" (Fixpunkte der Kollineation in der Höchstzahl sechs), von denen höchstens zwei nicht auf M_4^2 und höchstens zwei auf einem irreduziblen ebenen Schnitt der M_4^2 liegen, auf eine Reihe höchst inhaltsreicher Konfigurationsaussagen, deren nähere Besprechung in diesem Rahmen unmöglich ist.

Anschließend behandelt Verf. invariante Doppelquotienten (gegenüber $\mathit{\Gamma}_{15}$, $\mathbf{H}_{15}$) im Quaternionenkalkül und deren Analogien zu gewöhnlichen wie auch Graßmannschen Doppelverhältnissen sowie die Fragen nach der Erweiterung der Möbiusschen Transformationen der Gaußschen Ebene $z_2 = z_3 = 0$ zu Quaternionentransformationen bzw. Fragen, welche die Fortsetzung der Transformationen einer gewöhnlichen komplexen Veränderlichen in das Möbiussche dreidimensionale Kontinuum (z_0, z_1, z_2) betreffen.

Im abschließenden Teil IV der ganzen Theorie gibt Verf. eine Darstellung des Zusammenhanges der entwickelten Quaternionengeometrie mit der projektiven Geometrie im R_3. Dieser Zusammenhang erscheint im "erweiterten" Möbiusschen Kontinuum, d. h. im komplexen Gebiet der Mannigfaltigkeit M_4^2 von erhöhter Bedeutung, sofern die bisher untersuchten Quaternionentransformationen auf diesem Standpunkt im wesentlichen in die ins Komplexe fortgesetzten Kollineationen und Korrelationen des projektiven Linienraumes übergehen. Die ganze Theorie gipfelt in dem Satz: Bei jeder durch eine lineare Transformation vermittelten Abbildung des (erweiterten) Möbiusschen Kontinuums $\mathbf{M}_4$ auf das Plückersche Linienkontinuum (das Kontinuum der $\infty^{2.4}$ Geraden im R_3 der projektiven Geometrie) geht das Konjugium, d. h. die Transformation, die aus jeder Figur die konjugiert-komplexe entstehen läßt, in $\mathbf{M}_4$ über in irgendeine involutorische Antikollineation ohne Inzidenzpunkte und Inzidenzebenen. Reellen Figuren in $\mathbf{M}_4$ werden also durch eine solche Abbildung zu der Antikollineation gehörige quasi-reelle Figuren zugeordnet und umgekehrt. Insbesondere entsprechen den ∞^4 reellen Punkten des Möbiusschen Kontinuums die ∞^4 Inzidenzgeraden der Antikollineation. Ferner entspricht den $2 \,.\, \infty^{15}$ reellen konformen Transformationen in $\mathbf{M}_4$ eine zu ihr holomorphe Gruppe quasi-reeller Kollineationen und Korrelationen, nämlich die Gruppe aller automorphen Kollineationen und Korrelationen der Antikollineation. Oder, was dasselbe ist, es entsprechen jenen konformen Transformationen projektive Transformationen im R_3, die das System der ∞^4 Inzidenzlinien der Antikollineation in Ruhe lassen und umgekehrt. Dabei versteht Verf. mit *C. Segre* unter Antikollineationen und Antikorrelationen Transformationen, welche aus Kollineationen und Korrelationen durch Zusammensetzung mit dem Konjugium hervorgehen. "Quasi-reell" nennt Verf. jede Figur des projektiven R_3, welche bei den Transformationen einer speziellen (zweiten) Klasse involutorischer Antikollineationen, deren Individuen (in projektiven Kontinuen von einer ungeraden Anzahl komplexer Dimensionen) nicht (wie im Falle gerader Dimensionen) zum Konjugium, sondern zueinander kollinear sind, in Ruhe bleibt. Entsprechend heißen quasi-reelle Kollineationen und Korrelationen automorphe Kollineationen und Korrelationen der angegebenen Antikollineation. Die Zuordnung von bilinearen und quasibilinearen Quaternionenformen zu gewöhnlichen quaternären bilinearen Formen erweist sich weitgehend parallel, so daß es nicht einmal auf das Verhalten der "parallelen" Nablafunktionen und Determinanten ankommt. Welche Gruppen entsprechen mm in der projektiven Geometrie den Gruppen $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$ gepaarter Quaternionentransformationen? Mit der Aufstellung dieser zu $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{H}_{16}$ nichtreell kollinearen Gruppe $\mathfrak{G}_{16}^*$, $\mathfrak{H}_{16}^*$, ihrer Erweiterung durch das Konjugium und ihrer Deutung an Hand der zu ihr meromorphen Gruppe $\mathfrak{G}_{15}^*$, $\mathfrak{H}_{15}^*$ (indem die verwendeten Veränderlichen homogen aufgefaßt werden) in einem projektiven $\mathfrak{R}_7$ (bzw. $\mathfrak{R}_7^*$) findet die ganze Arbeit ihren Abschluß. Die zu $\mathfrak{G}_{15}^*$ kollineare Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$ erscheint dabei als eine (invariante) Untergruppe der $\mathfrak{G}_{18}$ aller $\infty^{2.18}$ automorphen Kollineationen einer gewissen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit vierter Ordnung $\mathfrak{M}_4^4$ im projektiven $\mathfrak{R}_7$, deren weitere Eigenschaften und Analogien genauestens untersucht werden.

Reviewer: Pinl, M., Dr. (Berlin)

MSC:

30-XX Functions of a complex variable

Cited in **1** Review

Full Text: DOI EuDML