Haar, A.
Über das Plateausche Problem. (German) JFM 52.0710.02
Math. Ann. 97, 124-158 (1926).

Bereits vor einer Reihe neuerer Untersuchungen über das *Plateau*sche Problem, welche man *S. Bernstein, C. Müntz* und *T. Radó* verdankt, begann *H. Lebesgue* (Annali di Mat. (3) 7 (1902), 231-235; F. d. M. 33, 307 (JFM 33.0307.*)) als erster eine Behandlung des Problems mit Hilfe der (weiterentwickelten) *Hilbert*schen "direkten" Methoden der Variationsrechnung. Unter gleichen Voraussetzungen wie in den *Bernstein*schen Entwicklungen wird die Existenz einer Funktion $z(x,y)$ bewiesen, welche der *Lipschitz*schen Bedingung genügt und auf welcher die gegebene Randkurve einen Flächeninhalt von minimalem Inhalt abgrenzt. Doch bleibt die Frage, ob z (x,y) der *Plateau*schen Differentialgleichung genügt, also zweimal differenzierbar ist, unentschieden.

Mit dem Ziel, das *Plateau*sche Problem mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung für die gleichen Randkurven, welche in den *Lebesgue*schen und *Bernstein*schen Untersuchungen auftreten, zu lösen, beginnt Verf. mit der Aufstellung zweier Hilfssätze (in der gemeinsamen Form):

$$\liminf_{n\to\infty} \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dxdy \geqq \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.$$

Dabei versteht Verf. unter $F(p,q)$ eine für alle reellen Werte p, q analytische Funktion, welche den Bedingungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right) > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} > 0$$

genügt. Die Behauptung wird unter zweierlei Voraussetzungen bewiesen. Beidemal werden die Elemente der in einem Quadrat Q definierten Funktionenfolge $f_n(x,y)$ gleichmäßig konvergent angenommen mit der Grenzfunktion $f(z,y)$; während aber zunächst zum Beweis der Behauptung einmalige stetige Differenzierbarkeit der f_n sowohl wie auch der Grenzfunktion vorausgesetzt wird, genügt es bereits, von f_n und f nur die Gültigkeit der *Lipschitz*bedingung zu verlangen. Überdies bleiben die Hilfssätze richtig für alle Bereiche, welche durch endlich viele Quadrate beliebig approximiert werden können.

Nunmehr wird der Untersuchung eine geschlossene doppelpunktfreie Raumkurve C, $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, $\zeta = \zeta(t)$, zugrunde gelegt, von der besonderen Beschaffenheit, daß die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels irgendeiner Ebene, welche wenigstens drei Kurvenpunkte enthält, mit der (x,y)-Ebene ihrem Betrage nach unter einer endlichen Grenze $\varDelta$ bleibt. Es kommt jetzt zunächst darauf an, die Existenz einer innerhalb des konvexen Bereichs, der von der Projektion c der gewählten Raumkurve auf der (x,y)-Ebene abgegrenzt wird, definierten Funktion $z(x,y)$ zu beweisen, welche der *Lipschitz*bedingung genügt und so beschaffen ist, daß die Fläche $z = z(x,y)$ die Raumkurve enthält und einen kleineren Flächeninhalt besitzt als irgendeine andere durch die Raumkurve hindurchgehende Fläche. Zur Konstruktion der Funktion z werden zunächst alle im konvexen Gebiet definierten Funktionen $f(x,y)$ ausgewählt, welche neben der Bedingung $f(\xi(t),\eta(t)) = \zeta(t)$ noch der Abschätzung

$$\left|\frac{f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)}{[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}}\right| < \varDelta + 1$$

genügen. Dann besitzen die Werte der Doppelintegrale

$$\iint F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$$

einen Limes inferior. Insbesondere kann, wenn keine der Vergleichsfunktionen dem Doppelintegral den Wert des Limes inferior erteilt, eine Funktionenfolge angegeben werden, für welche die zugehörige Doppelintegralfolge gegen den Wert d des Limes inferior konvergiert. Dann gilt aber auch

$$\iint F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy = d,$$

wenn z die Grenzfunktion einer in der erwähnten Funktionenfolge enthaltenen gleichmäßig konvergenten Teilfolge ist. Mehr noch: Diese Funktion liefert das absolute Minimum des Doppelintegrals gegenüber jeder Vergleichsfunktion $\tilde{z}$, welche neben $\tilde{z}(\xi(t), \eta(t)) = \zeta(t)$ im Gebiet einzig und allein noch der *Lipschitz*bedingung (mit irgendeiner *Lipschitz*schen Konstanten) unterworfen ist. Dieser letzte Sachverhalt fordert geometrisch, daß die Fläche $z = z(x, y)$ von keiner Ebene in einer geschlossenen Kurve durchsetzt wird:

$$m \leqq z(x, y) - \alpha x - \beta y - \gamma \leqq M \quad \text{für beliebige Konstante} \quad \alpha, \beta, \gamma.$$

Es zeigt sich, daß die Bedingung für jeden inneren Punkt des konvexen Gebietes erfüllt ist, wenn sie am Rande gilt. Umgekehrt konnte *T. Radó* zeigen, daß eine auf und innerhalb c definierte stetige Funktion $z(x, y)$, welche bei jeder Wahl der Konstanten α, β, γ und in jedem innerhalb c gelegenen Gebiet der Ungleichung $m \leqq z(x, y) - \alpha x - \beta y - \gamma \leqq M$ genügt, sobald sie für alle Randpunkte auf c erfüllt ist, der Ungleichung

$$\left|\frac{z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}}\right| < \varDelta$$

genügt (für alle Punktepaare innerhalb c), wenn nur außerdem jede Ebene, welche mit der Raumkurve C mindestens drei Punkte gemeinsam hat, eine kleinere “Steilheit” $\operatorname{tg} \varphi$ als $\varDelta$ besitzt. Dieses Lemma ermöglicht den Nachweis für das absolute Integralminimum.

Aus der Kenntnis der in der angegebenen Weise konstruierten Extremalfunktion z folgt, da z der *Lipschitz*bedingung genügt, nach einem Satz von *Rademacher* die Existenz der ersten Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q(x, y)$$

fast überall im Gebiet. Nunmehr kann (unter Verwendung zahlreicher zum Teil sehr subtiler Hilfsmittel aus der modernen Maßtheorie reeller Funktionen nach *Lebesgue, Radó, Rademacher* und *Fubini*) mit Verwendung der Abkürzung

$$w = [1 + p^2 + q^2]^{\frac{1}{2}}$$

für jedes innerhalb c gelegene achsenparallele Rechteck R die Existenz dreier Funktionen $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, $\omega_3(x, y)$ gezeigt werden, welche innerhalb R der *Lipschitz*bedingung genügen und zusammen mit der Extremalfunktion $z(x, y)$ die folgenden drei Differentialgleichungssysteme

$$\frac{q}{w} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \qquad \frac{p}{w} = -\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \tag{A}$$

$$\frac{1 + p^2}{w} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \qquad \frac{pq}{w} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \tag{B}$$

$$\frac{pq}{w} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \qquad \frac{1 + q^2}{w} = \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \tag{C}$$

befriedigen. Schließlich ermöglicht die Abbildung

$$X = x, \quad y = \omega_3(x, y)$$

Konstruktion von vier Funktionen

$$Z(X, Y),\ \varOmega_1(XY), \qquad \varOmega_2(X, Y),\ Y(X, Y),$$

deren erstes wie auch zweites Paar den *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen genügen. Die den *Lipschitz*bedingungen genügenden Lösungen (und um solche handelt es sich) dieses Systems sind aber nach *De la Vallée Poussin* und *Rademacher* analytische und zwar harmonische Funktionen. Dieser Schluß überträgt sich aber nunmehr in einfacher Weise auf die Extremaifunktion $z(x, y)$. Jetzt ist es eine einfache Aufgabe, die *Euler-Lagrange*schen Differentialgleichungen der Minimalflächen für z zu gewinnen (etwa durch Elimination der Funktion ω_1 aus dem System A).

Reviewer: Pinl, M., Dr. (Berlin)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] ?Sur les surfaces d?finies au moyen de leur courbure moyenne ou totale.? Annales de l'?cole Normale (3)27 (1910) und ?Sur les ?quations du calcul des variations.? Annales de l'?cole Normale (3)29 (1912).

[2] ?Die L?sung des Plateauschen Problems ?ber konvexen Bereichen.? Mathematische Annalen94 (1925). · Zbl 51.0545.03

[3] ?Sur l'int?gration des ?quations aux d?riv?es partielles du type elliptique.? Mathematische Annalen95 (1926).

[4] Mathematische Annalen96 (1926). · Zbl 52.0546.01

[5] Die Ritzsche Methode benutzt denselben Gedanken; freilich ist die Konvergenz der Minimalfolge bei den von Ritz behandelten Problemen eine Folge des Umstandes, da? das zugrunde gelegte Integral die zweiten Ableitungen der unbekannten Funktion enth?lt, in welchen F?llen eine Verallgemeinerung des bekannten Osgoodschen Satzes anwendbar ist. Auf diesen gl?ttenden Einflu? der h?heren Ableitungen habe ich in einem Vortrag in der mathematischen Gesellschaft in G?ttingen (26. Juli 1910) aufmerksam gemacht.

[6] Sul principio di minimo di Dirichlet.? Annali di Matematica (3)15 (1908) S. 125.

[7] ?Int?grale, Longueur, Aire.? Annali di Matematica (3)7 (1902). · Zbl 33.0307.02

[8] ?Geometrische Betrachtungen ?ber zweidimensionale regul?re Variationsprobleme.? Acta scientiarum universitatis Franc. Jos Szeged2 (1926).

[9] ??ber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen.? I und II. Mathematische Annalen79 und 81 (1919 und 1920).

[10] ??ber den analytischen Charakter der Minimalfl?chen.? Mathematische Zeitschrift24 (1925). · Zbl 51.0546.01

[11] S. 344 der in 7) ?Int?grale, Longueur, Aire.? Annali di Matematica (3)7 (1902). angef?hrten Abhandlung. Es ist das Verdienst von Herrn L. Tonelli, die Wichtigkeit der Halbstetigkeit des Integrals bei der Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung hervorgehoben zu haben. Vgl. sein inhaltsreiches Werk ?Fondamenti di calcolo delle variazioni I. II., Bologna. [Anmerkung w?hrend der Korrektur.] F?r den speziellen Fall des Plateauschen Variationsproblems folgt dieser Hilfssatz, sowie auch der folgende Hilfssatz II, aus den wichtigen Ergebnissen, die Herr L. Tonelli k?rzlichst (nach Einreichen der vorliegenden Arbeit) ?ber den Fl?cheninhalt ver?ffentlicht hat. Vgl. ?Sulla quadratura delle superficie?. Atti della Reale Accademia dei Lincei (6)3 (1926), S. 357, 445, 633.

[12] F?r den speziellen Fall des Fl?cheninhaltes folgt dieser Satz aus den Untersuchungen von Z. de Ge?cze; vgl. seine Th?se: ?Quadrature des surfaces courbes.? Teubner, 1909. Vgl. auch Anm. 11).

[13] Vgl. die in 9) angef?hrte erste Arbeit von Herrn Rademacher S. 347.

[14] Die Gesamtheic dieser Funktionen m?ge mit (G) bezeichnet werden; ?brigens kann man statt ?+1 jede Gr??e, die gr??er als ? ist, verwenden.

[15] F?r Polyederfl?chen ist dieser Satz von Herrn H. Lebesgue (a. a. O. S. 349) bewiesen; f?r stetig gekr?mmte Fl?chen benutzt ihn Herr S. Bernstein, S. 235 der ersten in Anmerkung 1) ?Sur les surfaces d?finies au moyen de leur courbure moyenne ou totale.? Annales de l'?cole Normale (3)27 (1910) genannten Arbeit. F?r die vorliegenden Untersuchungen ist es entscheidend, den Satz in voller Allgemeinheit zu besitzen. In seiner ersten Arbeit ?ber diesen Gegenstand: ??ber das Dirichletsche Prinzip? (Jabresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung8 (1900)) deutet Herr Hilbert einen Weg f?r die Behandlung der gew?hnlichen Randwertaufgabe der Potentialtheorie an, der manche Analogie mit diesem Satze aufweist. Vgl. auch 8) ?Geometrische Betrachtungen ?ber zweidimensionale regul?re Variationsprobleme.? Acta scientiarum universitatis Franc. Jos. Szeged2 (1926).

[16] Journal f?r Mathematik149 (1919). Herr L. Lichtenstein gab am Schlusse seiner Arbeit ?Bemerkungen ?ber das Prinzip der virtuellen Verr?ckungen in der Hydrodynamik inkompressibler Fl?ssigkeiten?. (Annales de la soci?t? polonaise de math?matique 1924, S. 20-28) einen ?u?erst einfachen und eleganten Beweis meines daselbst benutzten Hilfssatzes.

[17] Bemerkung ?ber die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme?, Acta scientiarum universitatis Franc. Joseph. Szeged2 (1925).

[18] Alle Fl?chenF ? enthalten die RaumkurveC, da falls ?, ? die Koordinaten irgendeines Punktes von ? bezeichnen, die Transformationsgleichungen (7) wegen ? (?, ?)=0 in die Identit?tx=?,y=? ?bergehen.

[19] S. 359 der ersten in 9) ??ber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen.? I und II. Mathematische Annalen79 und 81 (1919 und 1920).

[20] Vgl. etwa C. Carath?odory: Reelle Funktionen. Leipzig 1918, S. 627 u. 628.

[21] a. a. O. 10) ??ber den analytischen Charakter der Minimalfl?chen.? Mathematische Zeitschrift24 (1925) und 22) ?Bemerkung ?ber die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme?, Acta scientiarum universitatis Franc. Joseph. Szeged2 (1925).

[22] vgl. H. Rademacher, a. a. O. 9). S. 347, Gleichung (27).

[23] ?R?duction des int?grales doubles de Lebesgue?. Bulletin de l'Acad?mie Royale de Belgique (Sciences) 1910.

[24] ??ber streckentreue und winkeltreue Abbildung.? Mathematische Zeitschrift4 (1919). · Zbl 47.0268.01