**Study, E.**

**Vereinfachte Begründung von Lies Kugelgeometrie. I.** (German) JFM 52.0630.02

Sitzungsberichte Akad. Berlin 1926, 360-380 (1926).

Verf. beginnt nach einer Polemik gegen neuere Darstellungen der "höheren" Kugelgeometrie mit der Behandlung einer nichtsingulären quadratischen Mannigfaltigkeit $M_4^2$ in einem projektiven Kontinuum $R_5$ von fünf komplexen Dimensionen in der besonderen Form

$$\mathfrak{z}_0^2 - \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 - \mathfrak{z}_3^2 + \mathfrak{z}_4^2 - \mathfrak{z}_5^2 = 0.$$

Sodann wird die Darstellung der $2 \cdot \infty^{2\cdot 3}$ (Verf. zählt reelle Parameter) auf $M_4^2$ gelegenen links- bzw. rechtsseitigen Ebenen durch zwei lineare Systeme von je drei Gleichungen gegeben. Die Koeffizienten $A_{ik}$, $B_{ik}$ dieser Darstellungen sind mit denen zweier eigentlicher ternärer homogener orthogonaler Transformationen identisch. Mit Hilfe dieser Koeffizienten ergeben sich nun weiter die *Graßmann*schen Koordinaten $\mathfrak{X}_{ikl}$ bzw. $\mathfrak{Y}_{ikl}$ einer solchen links- bzw. rechtsseitigen Ebene. Zwischen ihnen bestehen dieselben Identitäten (zwanzig linear unabhängige quadratische Gleichungen) wie zwischen den Koeffizienten einer homogenen ternären eigentlichen bzw. uneigentlichen Transformation und keinerlei weitere Abhängigkeiten. Die Kontinua der Ebenen $E_\xi$ und $E_\varphi$ auf $M_4^2$ sind dabei nicht abgeschlossen (die Darstellung ist nicht erschöpfend). Werden nunmehr die Koeffizienten $A_{ik}$, $B_{ik}$ durch die *Euler*schen Formeln vermöge zweier Systeme homogener Parameter:

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3, \quad \varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

ausgedrückt, so vermittelt die Deutung dieser Parameter als homogene Punkt- bzw. Ebenenkoordinaten in einem projektiven Kontinuum ("Bildraum") $R_3$ eine für alles weitere wichtige Abbildung: Der *Plücker*schen Identität der Linien- bzw. Achsenkoordinaten in $R_3$ entspricht die Gleichung der $M_4^2$ in $R_3$, dem Geradenbündel durch einen Punkt $\xi$ in $R_3$ eine Ebene $E_\xi$ auf $M_4^2$, dem Geradenfeld in einer Ebene $\varphi$ des $R_3$ eine Ebene $E_\varphi$ auf $M_4^2$, einem Punkt $\xi$ und einer Ebene $\varphi$, welche im $R_3$ nicht vereinigt liegen, zwei windschiefe Ebenen $E_\xi$ und $E_\varphi$ auf $M_4^2$, einem Punkt $\xi$, vereinigt gelegen mit einer Ebene $\varphi$ auf $M_4^2$, entsprechen zwei Ebenen $E_\xi$ und $E_\varphi$, welche sich in einer Geraden schneiden, und damit die Bedingung vereinigter Lage:

$$(\xi\varphi) = \xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2 + \xi_3\varphi_3 = 0.$$

Dem Schnittpunkt zweier linksseitiger Ebenen auf $M_4^2$ entspricht die Verbindungsgerade zweier Punkte $\xi$ und $\eta$ in $R_3$ (entsprechend im rechtsseitigen Fall). Jeder *Bianchi*schen Fazette in $R_3$, $(\xi, \varphi)$, d. h. jedem *Lie*schen Flächenelement (Punkt und Ebene in vereinigter Lage), entspricht so eine Gerade $\mathfrak{Z}$ auf $M_4^2$ und umgekehrt. Die Aufgabe der Berechnung der *Graßmann*schen Koordinaten $\mathfrak{Z}_{ik}$ einer Geraden $\mathfrak{Z}$ auf $M_4^2$ aus einer gegebenen Fazette $(\xi, \varphi)$ und umgekehrt die der Fazette $(\xi, \varphi)$ bei gegebenen Koordinaten $\mathfrak{Z}_{ik}$ von $\mathfrak{Z}$ führt zunächst auf sechzehn Größen $C_{ik}$, welche, wenn das Produkt der Quadratwurzeln aus den Normen von $\xi$ und $\varphi$ nicht verschwindet, nichts andres darstellen als das Koeffizientensystem der allgemeinen eigentlichen quaternären homogenen orthogonalen Transformation (zusammen mit dem einen oder anderen der Werte von $\sqrt{N\xi}$, $\sqrt{N\varphi}$). Mit Hilfe dieser $C_{ik}$ gewinnt jetzt Verf. die fünfzehn *Graßmann*schen Koordinaten $\mathfrak{Z}_{ik}$ von $\mathfrak{Z}$, sowie die fünfzehn *Graßmann*schen Koordinaten $\mathfrak{U}_{ik}$ des Polarraumes $\mathfrak{R}_3$ von $\mathfrak{Z}$ bezüglich $M_4^2$. Die Zuordnung der Figuren $E_\xi$, $E_\varphi$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{R}_3$ des $R_5$ zu den Figuren $\xi, \varphi$, $(\xi, \varphi)$ des Bildraumes $R_3$ ist birational und singularitätenfrei.

Ein linearer Raum $R_4$, welcher die $M_4^2$ nicht berührt, wird von den Ebenen $E_\xi$, $E_\varphi$ der $M_4^2$ in Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ geschnitten, welche auf seinem Schnitt mit $M_4^2$, also auf einer nichtsingulären $M_3^2$ liegen. Werden jetzt die Ebenen $E_\xi$, $E_\varphi$ vermöge einer Transformation der Kollineationsgruppe $\mathfrak{G}_{15}(\mathfrak{H}_{15})$ von $M_4^2$ untereinander vertauscht, so induziert diese $\mathfrak{G}_{15}(\mathfrak{H}_{15})$ eine Vertauschung der Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ deren Gesamtheit eine Gruppe $G_{15}(H_{15})$ mit den $2 \cdot \infty^{2\cdot 3}$ Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ als einfachsten Raumelementen bildet. Da jede der auf $M_3^2$ gelegenen Geraden die Rolle einer $\mathfrak{X}$- wie auch die einer $\mathfrak{Y}$-Geraden übernehmen kann, erscheint die $M_3^2$ in doppelter Überdeckung als Ort der auf ihr gelegenen Geraden. Die Transformationen $G_{15}$ vertauschen dabei die $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Geraden innerhalb ein und derselben Schicht, die Transformationen $H_{15}$ dagegen mit Vertauschung der Schichten. Dies hat sein Gegenstück im Bildraum $R_3$, wo $G_{15}$ die Gruppe der Kollineationen $\Gamma_{15}$, $H_{15}$ die Gruppe der Korrelationen $H_{15}$ entspricht. Der Begriff der "vereinigten Lage" zweier Ebenen $E_\xi$ und $E_\varphi$ überträgt sich nun auf die "vereinigte Lage zweier Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$", welche dann entweder einen Punkt $\mathfrak{z}$ gemeinsam haben oder sich überdecken. Während nun die vereinigte Lage von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ invariant gegenüber $G_{15}(H_{15})$ ist, ist das Übereinanderliegen zweier solcher Geraden (aus verschiedenen Schichten) lediglich gegenüber einer Untergruppe $G_{10}(H_{10})$ von $G_{15}(H_{15})$ invariant, welcher die $\mathfrak{G}_{10}$ der automorphen Kollineationen von $M_3^2$ meromorph entspricht. Zwei Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ in vereinigter Lage entspricht so im Bildraum $R_3$ eme bestimmte Fazette $(\xi, \varphi)$, insbesondere dem Fall der Überdeckung von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ eine Fazette, deren Punkt $\xi$ und Ebene $\varphi$ als Nullpunkt und Nullebene relativ zu einem gewissen linearen Komplex dem sogenannten Hauptkomplex des Bildraums $R_3$ zusammengehören. So entspricht der Gruppe $G_{10}(H_{10})$ die Gruppe $\Gamma_{10}(H_{10})$ der automorphen Kollineationen (Korrelationen) des Hauptkomplexes im Bild $R_3$. Alle diese hier erwähnten Begriffsverkettungen entwickelt Verf. restlos und in bekannter Gründlichkeit durch algebraische Rechnung. Dabei wird der Begriff "Blatt" von Wichtigkeit als Inbegriff einer Ebene $\mathfrak{U}$ von $R_4$ und ihrer Schnitte $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ mit $M_3^2$. Zu jeder Ebene $\mathfrak{U}$, welche $M_3^2$ berührt, gehören zwei Blätter. Die $M_3^2$ erscheint mit ihren Berührungsebenen in doppelter Weise mit Blättern überdeckt. Dabei bilden die singulären Berührungsebenen $\mathfrak{U}$, welche $M_3^2$ in einer Geraden berühren, die Verzweigungsfigur dieser doppelten Überdeckung. Jedem Blatt entspricht im Bildraum eine bestimmte Fazette und umgekehrt. Übereinander liegenden Blättern entsprechen im Bildraum Fazetten, die durch das Nullsystem des Hauptkomplexes gepaart sind, und umgekehrt.

Die Schnitte des "Kugelraumes" $M_3^2$ mit Ebenen heißen "Kreise", diejenigen mit linearen $\mathfrak{R}_3$ des Raumes $R_4$ "Kugeln". Verteilt man die beiden Scharen von $\infty^{2\cdot 1}$ Geraden einer solchen Kugel in zweifacher Weise auf die beiden Schichten der $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Geraden, so entsteht bei vereinigter Lage jeder von $\infty^{2\cdot 1}$ $\mathfrak{X}$-Geraden mit jeder von $\infty^{2\cdot 1}$ $\mathfrak{Y}$-Geraden der Begriff "orientierte Kugel" synonym mit "Verein" $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ von $\infty^{2\cdot 2}$ Blättern. Infolge der Invarianz der vereinigten Lage gegenüber $G_{15}(H_{15})$ besteht auch (orientierte) Kugelinvarianz gegenüber diesen Gruppen. Man hat reguläre und singuläre orientierte Kugeln zu unterscheiden. Die ersten überlagern paarweise je eine nichtorientierte Kugel; die zweiten sind mit den Punkten der $M_3^2$ identisch, sofern diese als Träger von $\infty^{2\cdot 2}$ Blättern betrachtet werden können. Führt man, um den letzten Sachverhalt zu präzisieren, den Terminus "Punktkugel" ein, so ist damit zum Ausdruck gebracht, daß der Punkt als Verein einen besonderen Fall der orientierten Kugel bedeutet. Auch die Blätter der Punktkugel bilden ein einziges analytisches Kontinuum; im Gegensatz zur regulären Kugel kommt jedoch in diesem Kontinuum mit jedem Blatt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ auch das umgekehrte Blatt $(\mathfrak{X}' = \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X})$ vor. Die Verzweigungsmannigfaltigkeit dieses Blätterkontinuums besteht aus $\infty^{2\cdot 1}$ singulären Blättern, welche zum Begriff der "Nullkugel" führen. Jedem Blätterverein entspricht im $R_3$ ein Fazettenverein, d. h. eine Gerade, somit gehört also zu jeder orientierten Kugel eine Gerade im Bildraum und umgekehrt. Den Punktkugeln entsprechen die Geraden im Hauptkomplex. Nunmehr führt Verf. als Koordinaten einer orientierten Kugel die Verhältnisgrößen $\mathfrak{z}_0 : \mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 : \mathfrak{z}_3 : \mathfrak{z}_4 : \mathfrak{z}_5$, $\mathfrak{z}_0 = \sqrt{\mathfrak{z}_1^2 - \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2\mathfrak{z}_4^2 + \mathfrak{z}_5^2}$ ein. Die Zweideutigkeit der Quadratwurzel ist von großer Wichtigkeit: Der Bestimmung der Wurzelgröße $\mathfrak{z}_0$ entspricht die Trennung der Geradenscharen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$. Zwei orientierte Kugeln berühren sich, wenn sie ein Blatt gemeinsam haben. Entsprechend haben ihre Bildgeraden eine Fazette gemeinsam, d. h. sie berühren (schneiden) einander. Zwei sich berührende orientierte Kugeln bestimmen ein Büschel von $\infty^{2\cdot 5}$ orientierten, sich paarweise berührenden Kugeln, welchen im Bildraum ebene Geradenbüschel entsprechen. Diese Büschel liegen (wie auch die zugehörigen Blätter) paarweise übereinander. Der Verzweigungsmannigfaltigkeit der Blätter entsprechen die Fazetten im Hauptkomplex. Eine Berührung zweier (oder mehrerer) orientierter Kugeln liegt vor, sobald sie auch nur eine $\mathfrak{X}$- *oder* $\mathfrak{Y}$-Gerade gemeinsam haben. Zum Schluß betont Verf. noch eigens die großen Unterschiede, welche zwischen Berührungsmöglichkeiten orientierter bzw. nicht orientierter Kugeln bestehen. Eine besondere Eigentümlichkeit des Kugelraumes ist dabei die, daß sich zwei verschiedene seiner Punkte berühren können – nämlich immer dann, wenn ihre Verbindungsgerade auf $M_3^2$ liegt. Etwas derartiges ist bekanntlich in der projektiven Geometrie unmöglich.

Reviewer: Pinl, M., Dr. (Berlin)