Krull, W.

Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen. (German)

JFM 52.0111.02
Sitzungsberichte Heidelberg 1926, Nr.1, 32 S. (1926).

Verf. gibt eine Fortsetzung seiner Arbeit "Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen" (M. Z. 23 (1925), 161-196; F. d. M. 51, 116 (JFM 51.0116.*)). Auf die verallgemeinerten *Abel*schen Gruppen (Moduln mit allgemeinstem Operatorenbereich) wird der Begriff der *Jordan*schen Kompositionsreihe übertragen; die *Jordan*schen Kompositionsreihen führt Verf. von ihrem letzten Glied aus, d. h. ausgehend von der minimalen Untergruppe, ein. Eine Gruppe besitzt dann und nur dann eine *Jordan*sche Kompositionsreihe, wenn sie eine verallgemeinerte endliche *Abel*sche Gruppe ist, d. h. wenn sie keine unendliche echte Ober- oder Untergruppenkette hat. Es gelten die entsprechenden Sätze wie für gewöhnliche endliche Gruppen. Eine verallgemeinerte endliche *Abel*sche Gruppe besitzt zwei ausgezeichnete Kompositionsreihen, die "vordere bzw. hintere *Loewy*sche Kompositionsreihe", deren konstituierende Gruppen nicht irreduzibel (ohne Untergruppen), sondern nur vollständig reduzibel (direkte Summen von irreduziblen Gruppen) sind.

Es ergeben sich Anwendungen auf die Idealtheorie, die Theorie der hyperkomplexen Systeme und die "Elementarteilergruppen". Die Elemente der Elementarteilergruppe bilden eine verallgemeinerte *Abel*sche Gruppe von endlichem Rang, d. h. die Anzahl der in bezug auf einen Grundkörper $\mathfrak{K}$ unabhängigen Elemente ist endlich. Der Operatorenbereich $\mathfrak{K}(\theta)$ ist homomorph dem Polynomring $\mathfrak{P}(x)$ einer Veranderlichen über $\mathfrak{K}$. Die Elementarteilergruppen bilden das Analogon der gewöhnlichen endlichen *Abel*schen Gruppen, wenn man als Ordnung eines Gruppenelementes α dasjenige normierte Polynom $g(\theta)$ des Operatorenbereichs definiert, das α in das Element 0 überführt ($g(\theta) \cdot \alpha = 0$). Es ergeben sich dieselben Zerlegungssätze wie bei gewöhnlicher *Abel*scher Gruppen.

Jeder Klasse isomorpher hyperkomplexer Gruppen von endlichem Rang n (d. h. verallgemeinerter *Abel*scher Gruppen mit endlichem hyperkomplexem Operatorenbereich $\mathfrak{B}^*$ über dem Grundkörper $\mathfrak{K}$) entspricht umkehrbar eindeutig eine Klasse ähnlicher zu $\mathfrak{B}^*$ isomorpher Matrizensysteme vom Grad n mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$. Für die Elementarteilergruppen folgt daraus die Notwendigkeit der Klassifikation der hyperkomplexen Matrizensysteme $\mathfrak{S}$, die zum Polynomring einer Variablen homomorph sind. Ordnet man jedem $\mathfrak{S}$ diejenige Matrix zu, die bei dem Homorphismus dem Element x entspricht, so wird umkehrbar eindeutig jede Systemklasse einer Klasse ähnlicher Matrizen zugeordnet. Man erhält so den Zusammenhang mit der Elementarteilertheorie der Matrizen.

Reviewer: Fenchel-Sperling, Käthe (Kopenhagen)