Study, E.
Irrationale Kovarianten und elliptische Funktionen. (German) JFM 54.0136.03
Monatshefte f. Math. 35, 249-288 (1928).

Die vorliegende Arbeit ist die weitere Ausführung einer früheren (1894; F. d. M. 26, 495 (JFM 26.0495.*)). Es handelt sich im wesentlichen um gewisse irrationale Kovarianten einer binären biquadratischen Form

$$F(x) = F(x_0, x_1),$$

und ihren Zusammenhang mit elliptischen Funktionen und Integralen.

Eine solche Form F läß t sich auf 32 Arten als Produkt von vier Linearformen $(r_k x)$ darstellen, die gewissen einfachen Forderungen genügen, und irrationale Kovarianten von F sind. Die zugehörige Galois'sche Gruppe G_{32} umfaß t $24 \cdot 16$ Operationen, eben soviel wie die Zahl der geordneten Quadrupel von Formen $(r_k x)$, so daß sich immer 12 Quadrupel nur durch die Anordnung unterscheiden.

Zu je 16 solchen Quadrupeln gehören drei in bestimmter Folge zu nehmende quadratische Kovarianten $Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$, entsprechend den Paarungen der vier Formen $(r_k x)$.

Die Hauptanwendungen dieser Theorie erstrecken sich auf gewisse "Normalgestalten" der Form F und der zugehörigen elliptischen Integrale erster Gattung, sowie auf die *Hermite*sche Transformation der letzteren.

Ein wesentliches Hilfsmittel bietet sich dar durch den einfachen Zusammenhang zwischen den obigen Formen und den vier Thetafunktionen einer Variabeln u. Bedient man sich bequemer des kleinen Buchstabens ϑ, so hat man die grundlegende Tabelle $(i = 1, 2, 3)$:

$$\sqrt{(r_0 x)} = \vartheta u,\ \sqrt{(r, x)} = \vartheta_i u,$$
$$\sqrt{F(x)} = \frac{1}{2}\vartheta(0)\vartheta(2u),\ Q_i(x) = \frac{1}{2}\vartheta_i(0)\vartheta_i(2u),$$

wo sich die Thetafunktionen auch durch die (ihnen proportionalen) *Weierstraß*schen Sigmafunktionen ersetzen lassen.

Algebraisch wird mit der Symbolik operiert, bei Zugrundelegung von Linearformen

$$(cx) = c_0 x_1 - c_1 x_0, \dots .$$

Das vollständige System der Form F besteht aus F, den beiden Kovarianten H und T, und den beiden Invarianten g_2 und g_3; aus letzteren setzt sich die Diskriminante

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

zusammen. Die *Weierstraß*schen Größen e_1, e_2, e_3 sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0.$$

Vermöge einer Polarenidentität zwischen F, H und T läß t sich, wenn ein Linearfaktor (cx) von F bekannt ist, das Produkt der drei übrigen invariant darstellen. Liegt eine Zerlegung:

$$F(x) = (c_0 x)(c_1 x)(c_2 x)(c_3 x)$$

vor, so existieren $2 \cdot 16$ entsprechende:

$$F(x) = (r_0 x) \dots (r_3 x),$$

je mit $\sum_k (r_k x)^2 \equiv= 0$. Bei zyklischer Folge der Indizes $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$ ist dann

$$(r_0 r_\lambda) = \pm (r_\mu r_\nu),$$

wo man sich auf das untere Vorzeichen beschränken darf; es wird dann genauer:

$$(r_0 r_\lambda) = -(r_\mu r_\nu) = 2\sqrt{e_\mu - e_\nu}.$$

Die obigen drei quadratischen Formen $Q_\lambda(x) = (q_\lambda x)^2$ bestimmen sich durch die Festsetzungen:

$$(q_\mu q_\nu)^2 = 0, \ldots, \frac{1}{2}(q_\lambda q_\lambda)^2 = 1, \ldots, \frac{1}{2}(q_2 q_3)(q_3 q_1)(q_1 q_2) = 1.$$

Die Quadrate der Q_λ gehören dem "syzygetischen" Büschel (F, H) an, was seinen Ausdruck in den drei Identitäten findet:

$$\sum Q_\lambda^2 \equiv 0, \ \sum e_\lambda Q_\lambda^2 \equiv F(x), \ \sum e_\lambda^2 Q_\lambda^2 \equiv H(x),$$

woraus sich eine Reihe von Folgerungen ziehen läßt. Dies findet seine Anwendung, um F und damit das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}$$

auf gewisse Normalgestalten zu bringen. Es kommen vor allem drei solche in Betracht:

Einmal die *Weierstraß*sche, wo $F(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$, sodann die *Cayley*sche, wo die Wurzeln von T als die drei Paare $0, \infty; \pm i, \pm 1$ normiert sind, endlich die *Riemann*sche, wo drei der Wurzeln von F in die Stellen $0, \infty, 1$ verlegt sind. Daran schließ t sich die *Hermite*sche Transformation, bei der die Quotienten $\frac{H}{F}, \frac{T}{F\sqrt{F}}$ als neue Variable eingeführt werden.

Im übrigen ist auf die inhaltsreiche Abhandlung selbst zu verweisen; man kann sie als Muster einer Behandlung ansehen, die sowohl den algebraisch-symbolischen Gesichtspunkten, wie den transzendenten gerecht wird. (IV 6 C.)

Reviewer: Meyer, W. Fr., Prof. (Königsberg in Preußen)

Full Text: DOI

References:

[1] American Journal of Mathematics, Bd. 17 (1894).

[2] Einige der Weierstrassschen Definitionen mußten allerdings durch andere ersetzt werden, was früher schon (vom Verfasser) aus anderem Grunde ausgeführt worden ist. (Sphärische Trigonometrie, 1893.) Von {\S} 9 an werden diese Definitionen auch in der vorliegenden Arbeit benutzt.

[3] Siehe des Verfassers Einleitung in die Invariantentheorie, I, 1923, S. 255–257.

[4] Siehe besonders Th. Morschheuser, Die Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art. (Dissertation, Bonn 1928).

[5] Der Name ist von F. Klein vorgeschlagen worden.

[6] Es ist das die sogenannte invariantentheoretische Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Aus diesem Gesichtspunkt hatten sich die älteren Autoren (Cayley, Clebsch, Gordan) für irrationale Kovarianten interessiert.

[7] Daß in den drei Fällen verschiedene Paare von Veränderlichenx 0,x 1,y 0,y 1,z 0,z 1 benutzt werden, ist natürlich nebensächlich, wird aber die Darstellung erleichtern.

[8] Siehe die zitierte Schrift über Trigonometrie. Das Bestehen der im Texte genannten Möglichkeit liegt nunmehr ganz nahe, bedarf aber immerhin einer Erörterung, wergen der Mehrdeutigkeit der irrationalens Invarianten. Hierauf kann hier nicht eingegangen werden. Vgl. übrigens auch die eingangs erwähnten Formeln, in denen Thetafunktionen vorkommen.

[9] Ersetzt manr 0 durchr {\(\lambda\)}, so erhält man ebenfalls richtige Gleichungen, wenn manu durchu{\(\pm\)}{\(\omega\)}{\(\lambda\)} ersetzt.

[10] Vgl. z. B. Tannery et Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, Tafel XVI, wo die zweite Formel angeführt ist. – Man beachte noch die sehr ähnlich gebauten Gleichungen, die erhalten werden, wenn manu um eine halbe Periode vermehrt.

[11] Entsprechendes kann natürlich auch von dem Gebilde III ausgesagt werden. übrigens hat keine der übrigen Kovarianten vonF(x) eine ähnliche Eigenschaft wieT(x).

[12] Vgl. F. Klein, Math. Annalen, Bd. 27 (1886)=Abhandlungen, Bd. III (1923), S. 346–349. Durch die hier eingeführten Paare von Argumentenu, v werden die Formeln zu den vorhergehenden in Beziehung gesetzt.