Tychonoff, A.

Über die topologische Erweiterung von Räumen. (German) JFM 55.0963.01

Math. Ann. 102, 544-561 (1929).

Ist τ eine Kardinalzahl, so bedeute R_τ den folgenden (im *Hausdorff*schen Sinne) topologischen Raum: Jeder Ordnungszahl $\alpha < \omega_\tau$ (ω_τ kleinste Ordnungszahl der Mächtigkeit τ) sei ein Exemplar $\mathfrak{I}_\alpha$ der abgeschlossenen Einheitsstrecke $0 \leqq t_\alpha \leqq 1$ zugeordnet; Punkt von R_τ soll jedes System $x = (t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots)$ sein; Umgebung eines Punktes x_0 ist jede Menge von Punkten x, für die endlich viele Koordinaten $t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_k}$ auf Umgebungen (im Sinne von $\mathfrak{I}_\alpha$) der entsprechenden Koordinaten von t_{α_k} beschränkt und die übrigen t_α beliebig sind.

Der Raum R_τ ist bikompakt. Für $\tau = \aleph_0$ ist R_τ dem Fundamentalquader des *Hilbert*schen Raums homöomorph. Verf. zeigt nun, daß jeder normale topologische Raum, der ein Umgebungssystem von einer Mächtigkeit $\leqq \tau$ besitzt, einer Teilmenge des R_τ homöomorph ist. Zum Beweis führt Verf. den Begriff des *vollständig regulären* topologischen Raumes ein: So heißt ein Raum R, wenn es zu jedem Punkt x_0 und jeder x_0 nicht enthaltenden abgeschlossenen Menge A eine in ganz R stetige Funktion $f(x)$, $0 \leqq f(x) \leqq 1$, gibt, so daß $f(x_0) = 0$, $f(a) = 1$ für alle $a \in A$ gilt. Es wird dann gezeigt: Jede Teilmenge eines bikompakten Raumes – also insbesondere jede Teilmenge von R_τ – ist vollständig regulär, und jeder vollständig reguläre Raum, der ein Umgebungssystem von der Mächtigkeit τ besitzt, ist einer Teilmenge des R_τ homöomorph.

Zum Begriff des vollständig regulären Raumes ist zu bemerken: Jeder normale Raum ist vollständig regulär, und jeder vollständig reguläre Raum ist regulär; keine dieser beiden Aussagen ist umkehrbar, wie durch Beispiele gezeigt wird. Übrigens liefert eines der Beispiele eine negative Antwort auf die von *Alexandroff* und *Urysohn* (Math. Ann. 92 (1924), 258-266; F. d. M. 50, 128) aufgeworfene Frage, ob jeder reguläre nicht absolut abgeschlossene Raum durch Hinzufügen eines nicht isolierten Punktes zu einem ebenfalls regulären Raum erweitert werden könne.

Unter Heranziehung einer Zerlegung des R_τ (im Sinne von *Alexandroff*, Math. Ann. 96 (1926), 555-571, § 3; F. d. M. 52) zeigt Verf. schließlich: Jeder topologische Raum R ist einer Teilmenge eines absolut abgeschlossenen Raumes homöomorph, der ein Umgebungssystem von der gleichen Mächtigkeit wie ein gegebenes Umgebungssystem von R besitzt; dieser absolut abgeschlossene Raum wird als ein durch eine Zerlegung des R_τ bestimmter Raum hergestellt.

Reviewer: Pannwitz, Dr. Erika (Berlin)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Siehe vor allem Alexandroff und Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen92 (1924), S. 258, und Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Annalen96 (1926), S. 555; die Kenntnis dieser Arbeit (insbesondere auch die dort gebrauchte Terminologie) wird im folgenden vorausgesetzt; die erste dieser Arbeiten wird kurz durch "Alexandroff-Urysohn", die zweite durch "Alexandroff" zitiert. Wegen ausführlicher Darstellung der erwähnten Untersuchungen möge insbesondere auf "Mémoire sur les espaces compacts" (Verh. K. Akademie Amsterdam, Deel XIV, No. 1 (1929)) derselben Verfasser hingewiesen sein. · Zbl 50.0128.06 · doi:10.1007/BF01448008

[2] Alexandroff - Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen92 (1924), S. 261.

[3] Siehe Uryshohn, Zum Metrisationsproblem, Math. Annalen94 (1925), S. 309, wo auch andere Arbeiten über denselben Gegenstand angegeben sind. · Zbl 51.0453.01 · doi:10.1007/BF01208661

[4] Siehe Urysohn, Der Hilbertsche Raum..., Math. Annalen92 (1924), S. 302. · Zbl 50.0128.05 · doi:10.1007/BF01448012

[5] Diese Definition rührt von Urysohn her. Vgl. seine Arbeit: Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Annalen94 (1925), S. 292.

[6] Alexandroff, Math. Annalen96 (1926), S. 557 ({\S}4).

[7] Alexandroff und Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen92 (1924), S. 263, Satz V.

[8] Im Sinne von Alexandroff, Math. Annalen96 (1926), {\S} 3 (S. 556–557). Es sei hier ausdrücklich erwähnt, daß wir (der Alexandroffschen Definition entsprechend) beliebige allgemeine und nicht notwendig etwa stetige Zerlegungen betrachten.

[9] Aus dem Satze II und dem unter 13) zitierten Satz von Alexandroff folgt vielmehr, daß unsere Zerlegung nur dann stetig sein kann, wenn der gegebene Raum regulär ist.

[10] Alexandroff, a. a. O. {\S} 3„ S. 537.

[11] Alexandroff und Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen92 (1924), S. 262, Satz II.

[12] Alexandroff a. a. O. {\S} 3,Math. Annalen96 (1926), S. 537.