von Neumann, J.

Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. (German)

JFM 55.0825.02
Math. Ann. 102, 370-427 (1929).

Einen beschränkten oder (hypermaximalen) unbeschränkten *Hermite*schen Operator R kann man auf die Spektralform $(Rf,g)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda d(E(\lambda)f,g)$ bringen, wo $E(\lambda)$ eine passende Zerlegung der Einheit ist. – Es wird der allgemeinere Fall behandelt, daß R nicht *Hermite*sch, sondern (in geeigneter Definition) normal ist (für beschränkte R besagt dies, daß $RR^*=R^*R$, wo R^* der zu R "konjugierte" Operator ist). Die Eigenwerte von R können dann auch komplex sein, aber es gibt eine Spektraldarstellung

$$(Rf,g)=\iint zd(\varDelta(z)f,g); \tag{1}$$

hierbei ist $\varDelta(z)$ eine für $z=x+iy$ passend definierte Zerlegung der Einheit, und die Integration in (1) ist im *Stieltjes-Radon*schen Sinne über die Gesamtebene zu erstrecken. – In Fragen der Fortsetzbarkeit liegen bei den normalen Operatoren die Dinge einfacher als bei den *Hermite*schen.

Benötigt werden Betrachtungen zur Algebra der Operatoren, insbesondere der Begriff des Ringes. Im Beschränkten ist ein Ring eine Gesamtheit von Operatoren, welche mit A,B auch aA, A^*, $A+B$, AB enthält und (in geeigneter Topologie) abgeschlossen ist. Bemerkenswert ist der Satz, daß ein "*Abel*scher" Ring aus einem einzigen Element erzeugt werden kann.

Reviewer: Bochner, Dr. S. (Princeton (USA))

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Vgl. Hausdorff, Umgebungsaxiome und topologisch-lineare Räume: Grundzüge der Mengenlehre, I. Auflage, Leipzig und Berlin 1914.

[2] D. h. mitf,g auchaf,f+g enthält. Eine abg. lin M. muß auch noch abg. sein, d. h. alle ihre Häufungspunkte enthalten.

[3] Für lin. O. kann die Stetigkeit auf mehrere, gleichwertige Formulierungen zuruckgeführt werden, vgl. E. Satz 12. Eine von diesen ist: Es gebe ein festesc, so daß aus |f| |Af| folgt.

[4] 0, 1 sind durch 0f=0, 1f=f zu definieren.

[5] Vgl. E. Noether, Math. Annalen 96, 1 (1926), S. 26–61, insbesondere {\S}2; ferner E. Artin, Abh. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ.5, 3 (1927), S. 251–260.

[6] Fur Matrizen in endlichvieldimensionalen Räumen hat E. Fischer diese Bedingung als erster mit Erfolg eingeführt.

[7] Jedes hyperkomplexe System mit endlich vielen Einheiten kann ja durch Matrizen (also Operatoren) eines endlichvieldimensionalen Raumes dargestellt werden.

[8] Vgl. Burnside, Proc. London Math. Soc. (2)3 (1905), S. 430. Allerdings nur für unitäre Matrizen! · Zbl 36.0199.01 · doi:10.1112/plms/s2-3.1.430

[9] Vgl. Frobenius und I. Schur, Berl. Ber. 1906, S. 209.

[10] Es ist wohl nicht mißverständlich, daß wir, wie schon beiR(A), die Menge mit dem einzigen ElementR auchR nennen.

[11] Vgl. Toeplitz, Math. Annalen70 (1911), S. 351–376. · Zbl 42.0366.01 · doi:10.1007/BF01564502

[12] Zur Präzisierung dieses, die gewöhnliche (reelle) Hilbertsche Spektralform verallgemeinernden Begriffes vgl. E. Anhang II. Der Begriff der Normalität bei endlichvieldimensionalen Matrizen stammt von Frobenius [Journ. f. Math.84 (1877), S. 51–54; er bewies, daß diese und nur diese Matrizen unitär auf die Diagonalform (mit komplexen Diagonalelementen!) transformiert werden können. Im Encyklopädie-Artikel von Hellinger und Toeplitz (II. C. 13, S. 1562–1563) wurde dasselbe für die vollstetigen O. des Hilbertschen Raumes gezeigt. In E. Anhang I bewies der Verf., daß alle beschr. normalen O. auf die komplexe Hilbertsche Spektralform gebracht werden können (das ist eben das Äquivalent der Diagonalform). Hier soll die Theorie vervollständigt und auf unbeschr. O. ausgedehnt werden. – Unabhängig vom Verf., und unter Verwendung einer anderen Methode, hat seither

A. Wintner die unitären O. (die ein Spezialfall der beschr. normalen sind) cbenfalls auf die Spektralform gebracht. Vgl. Math. Zeitschr.30, 1/2 (1929), S. 228–282.

[13] Vgl. E., Einleitung VII.

[14] Vgl. Weyl, Dissertation Göttingen 1908, S. 8–9.

[15] Vgl. Hausdorff, Grundzuge der Mengenlehre, I. Auflage, Leipzig und Berlin 1914; daselbst wird auf diesen Umgebungsbegriff die ganze Topologie aufgebaut. Wir erwähnen, wie Häufungspunkte und Limites zu definieren sind. Ein Punkt ist Häufungspunkt einer Menge, wenn jede seiner Umgebungen Punkte der Meuge enthält; er ist Limes einer Folge, wenn jede seiner Umgebungen alle Punkte derselben, mit endlich vielen Ausnahmen, enthält. Man erkennt muhelos: Limes sein, heißt Häufungspunkt von jeder unendlichen Teilmenge der Folge sein.

[16] Weyl (vgl. Anm. 27)) Dissertation Göttingen 1908, S. 8–9. definiert sie etwas anders als wir. Vgl. S. 9 a. a. O.

[17] Alle Aussonderungsmethoden (bei Konvergenzbeweisen) im Hilbertschen Raume kommen darauf heraus.

[18] A * darum, weil aus |Af|{\(\cdot\)}|f| (für allef) |A * f|<=c{\(\cdot\)}|f| folgt – da diese Aussagen mit |(Af, g)|{\(\cdot\)}|f||g| bzw. |(A * f, g)|{\(\cdot\)}|f||g| (für allef, g, vgl. E., Satz 12 {\(\beta\)})) gleichwertig sind und (A * f, g)=(Ag, f) ist.

[19] Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt, da * für sie stetig ist, auch die starke Doppelkonvergenz.

[20] Also ist {\(\nu\)} in {\(\mu\)} stark wie schwach überall dicht, wir können insbesondere {\(\mu\)}={\(\beta\)} setzen. Für die gleichmäßige Topologie ist dies gewiß falsch, da dort leicht eine Menge von Kontinuum vielenA angegeben werden kann, die paarweise die Entfernung 1 haben. – Wenn wir {\(\mu\)} einer Kugel {\(\kappa\)} gleichsetzen, so können wir in {\(\kappa\)} aus der Gültigkeit des ersten Abzählbarkeitsaxioms (im starken wie im schwachen Sinne) leicht auch die des zweiten folgern (vgl. Anm.29),33)). Wir erwähnen noch, daß die schwache Topologie in {\(\kappa\)} kompakt ist (vgl. Ende von 1. und Anm.34)).

[21] Man beachte: schwach abg. ist mehr wie stark abt.!

[22] Die Vereinigungsmenge von {\(\mu\)} mit der 1.

[23] Die Rechnung entspricht in allen Einzelheiten der in E. Anhang I (beim Beweis von Satz 14*) für unitäre O. ausgeführten. Der Kunstgriff geht auf F. Riesz. zuruck.

[24] Es ist (2E)*=2E, (2E)2=4E 2E+1=1.

[25] Vgl. E., Einleitung III.

[26] Vgl. Rend. d. Circ. Mat. d. Palermo25 (1908), S. 57–73.

[27] Man beachte, daß zu diesem Beweise die Z. d. E. gegebener H. O. herangezogen werden mußten, während umgekehrt aus dem F. Rieszschen Satze deren Existenz bewiesen werden kann.–Über die hier in E. Anhang II verwendeten Stieltjes-Radonschen Doppelintegrale vgl. Wiener Akad.122, 2 (1913), S. 1295–1438, insbesondere {\S}{\S} I–II.

[28] Daß bei dieser Definition das kommutative und assoziative Gesetz der Addition sowie das assoziative der Multiplikation gelten, ist klar. Vom distributiven gilt immer (R{\(\pm\)}S){\(\cdot\)}T=R{\(\cdot\)}T{\(\pm\)}S{\(\cdot\)}T, dagegenR{\(\cdot\)}(S{\(\pm\)}T)=R{\(\cdot\)}S{\(\pm\)}R{\(\cdot\)}T nur für lin. und überall sinnvollesR (istR nur lin., so ist die linke Seite Fortsetzung der rechten). Es istR+0=R, 1{\(\cdot\)}R=R{\(\cdot\)}1=R,R{\(\cdot\)}0=0 (wennRf fürf=0 verschwindet) dagegen 0{\(\cdot\)}R nur dort definiert, woR es ist. Analog gestaltet sich das Verhältnis von–und–. Man sieht: im Unbeschränkten sind die Operationen +,{\(\cdot\)} nicht mehr so durchsichtig wie im Beschränkten.

[29] Jede der letztgenannten Relationen folgt aus der anderen: denn das auf den Definitionsbereich derR, R * eingeschränkteS, S * ist noch immer ein konj. Paar.

[30] Diese und ähnliche Klassen von Matrizen hat Toeplitz mit funktionentheoretischen Fragen in Beziehung gebracht. Vgl. auch a. a. O. Anm. 24). · Zbl 42.0366.01 · doi:10.1007/BF01564502

[31] Beim Beweise von Satz 14 sahen wir (R)'=(R, R*)', also=(S 1,S 2)'; (R)"=(S 1,S 2)'.

[32] Vgl. E., Anhang III, ferner die demnächst im Journal f. Math. erscheinende Arbeit des Verfassers "Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen".

[33] Vgl. E. Schmidt, am in Anm. 52) Vgl. Rend. d. Circ. Mat. d. Palermo25 (1908), S. 57–73 a. O. Siehe auch E. {\S} 1, Satz 8.