Noether, E.

Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. (German) JFM 55.0677.01

M. Z. 30, 641-692 (1929).

Das Hauptergebnis der Arbeit ist, daß ein einheitliches Prinzip gegeben wird, durch das sämtliche bisherigen Ergebnisse über hyperkomplexe Größen zusammengefaßt werden können (Darstellungstheorie und arithmetische Resultate).

Ein hyperkomplexes System ist ein Ring von endlichem Rang in bezug auf einen im Zentrum gelegenen Körper K. Da als Ideale nur K-Moduln zugelassen werden, gilt für diesen Ring Teilerkettensatz und Vielfachkettensatz für Rechts- und Linksideale. Für eine allgemeine Betrachtung ergibt sich also die Notwendigkeit einer Klassifikation der nichtkommutativen Ringe.

I. Die Ringe ohne Radikal mit Minimalbedingung für Rechtsideale sind identisch mit den Ringen, die vollständig reduzibel sind in bezug auf Rechtsideale und ein Einheitselement besitzen. Rechts vollständig reduzible Ringe mit Einheitselement sind auch zweiseitig vollständig reduzibel, und die direkten Summanden sind zweiseitig einfache Ideale, die natürlich auch als Ringe einfach sind. Es sei $\mathfrak{o}$ ein zweiseitig einfacher vollständig reduzibler Ring mit Einselement,

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \cdots + \mathfrak{r}_n$$

seine direkte Zerlegung in einseitige Ideale; dann sind sämtliche $\mathfrak{r}_i$ operatorisomorph, und $\mathfrak{o}$ ist isomorph dem Ring der Matrizen n-ten Grades in einem Körper K, der dem Automorphismenkörper der Ideale $\mathfrak{r}_i$ isomorph ist.

II. Zu jeder Darstellungsklasse eines Ringes $\mathfrak{o}$ in einem Körper K gehört eindeutig ein Darstellungsmodul, der gleichzeitig Linksmodul in bezug auf $\mathfrak{o}$ und Rechtsmodul in bezug auf K ist. Reduzibilität bzw. vollständige Reduzibilität der Darstellung wird identisch mit der Reduzibilität bzw. vollständigen Reduzibilität der Darstellungsmoduln.

III. Einer zweiseitig direkten Zerlegung eines Ringes

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_s$$

entspricht eine zweiseitig direkte Zerlegung des Darstellungsmoduls

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{a}_s\mathfrak{M}.$$

Infolgedessen kann man sich bei Betrachtung der Darstellungsmoduln auf zweiseitig unzerlegbare Ringe beschränken. (Es werden sogar nur zweiseitig einfache Ringe betrachtet.) Ein Darstellungsmodul eines zweiseitig einfachen, vollständig reduziblen Ringes $\mathfrak{o}$ mit Einselement ist selbst vollständig reduzibel. Die einfachen Bestandteile sind den einfachen Linksidealen von $\mathfrak{o}$ isomorph. Die direkt unzerlegbaren Darstellungsmoduln sind isomorph den einfachen Linksidealen l_i (siehe I); in Unterkörpern der Automorphismenkörper dieser l_i erhält man noch Darstellungen, wenn man die Elemente der darstellenden Matrizen ihrerseits durch gewisse Matrizen ersetzt. Für Ringe, die die Maximal- und Minimalbedingung erfüllen, aber ein Radikal $\mathfrak{c}$ haben, folgen entsprechende Sätze, wenn man statt der einfachen Linksideale von $\mathfrak{o}$ diejenigen von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ betrachtet.

Die Darstellungstheorie ist also zurückgeführt auf eine Theorie der Moduln, die als Gruppen mit Operatoren gewissen Idealklassen (Klasseneinteilung im Sinne des Operatorhomomorphismus) völlig entsprechen. Gleichzeitig mit sämtlichen Idealklassen eines Ringes sind auch die zugehörigen Modulklassen bekannt.

IV. Bei einem hyperkomplexen System $\mathfrak{o}$ ist der Restklassenring nach dem Radikal $\mathfrak{c}$ vollständig reduzibel; also ist nach III die Anzahl der nicht äquivalenten Darstellungen des Systems gleich der Anzahl der zweiseitig einfachen Summanden in $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$. Ist $\mathfrak{o}$ im algebraisch abgeschlossenen Körper noch ohne Radikal, so ist die Anzahl der absolut irreduziblen Darstellungsklassen gleich dem Rang des Zentrums.

Es folgt zum Schluß die Ableitung der klassischen Resultate der Darstellungstheorie für hyperkomplexe

Systeme.

Reviewer: Fenchel-Sperling, Käthe (Kopenhagen)

Full Text: DOI Link EuDML