Cartan, E.

Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne. (French) JFM 55.0248.01

Journ. de Math. (9) 8, 1-33 (1929).

Die vorliegende Arbeit bringt Ergänzungen und Vereinfachungen zu den Arbeiten des Verf. (1927; F. d. M. 53, 390 (JFM 53.0390.*)-394), die die Theorie der halbeinfachen Gruppen neu beleuchteten durch das Studium der irreduziblen Räume $\mathfrak{E}$ (siehe die oben genannten Referate), in denen die Parallelverschiebung die *Riemann*sche Krümmung invariant läßt. Das Studium der Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ dieser Räume ist nämlich eng verknüpft mit dem Studium der einfachen Gruppen. Die wesentlichen Fortschritte dieser Arbeit bestehen in der *allgemeinen* Ableitung von Sätzen, die Verf. früher für alle Typen einfacher Gruppen *einzeln bewies*.

Im ersten Abschnitt werden ältere Ergebnisse neu abgeleitet. Im zweiten Abschnitt füllt Verf. eine (nicht sehr wesentliche) Lücke aus, die sich in einer der oben genannten Untersuchungen (F. d. M. 53, 390 (JFM 53.0390.*)-391) findet. Dann kommt er zum eigentlichen Gegenstand der Arbeit: "Charakteristische Untergruppe" (eine wenig glückliche Bezeichnung !) einer reellparametrigen einfachen offenen Gruppe (vom Typus $\mathfrak{G}$) nennt er eine Untergruppe, die von infinitesimalen Transformationen $X_1, \dots, X_s$ erzeugt wird, derart daß (1) die X zusammen mit weiteren Transformationen $Y_1, \dots, Y_n$ die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ erzeugen, (2) die Form $\varphi(e)$ aus s negativen und n positiven Quadraten besteht, (3) $X' = X$, $Y' = -Y$ einen Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ darstellt. Solche Untergruppen $\mathfrak{g}$ spielen ja gerade bei der Untersuchung der Räume $\mathfrak{E}$ eine große Rolle (F. d. M. 53, 390-394) wegen ihres Zusammenhangs mit den Rotationsgruppen dieser Räume.

Grundlegend ist der folgende Satz, den Verf. nun ableitet, ohne die einzelnen Typen zu analysieren: Alle charakteristischen Untergruppen mit demselben s sind in der kontinuierlichen adjungierten Gruppe von $\mathfrak{G}$ einander ähnlich. Es gilt sogar folgende Verallgemeinerung: Besitzt $\mathfrak{G}$ eine charakteristische Untergruppe, so ist jede geschlossene Untergruppe von $\mathfrak{G}$ in einer charakteristischen enthalten.

Überlegungen, die an eine frühere Arbeit des Verfassers (F. d. M. 53, 393 (JFM 53.0393.*), insbesondere letzte Zeile) anknüpfen, führen ihn zu scharfen Aussagen über die *Betti*schen Zahlen von $\mathfrak{G}$ (Referent war nicht in der Lage, diesen Überlegungen ganz zu folgen). Ferner ergibt sich eine Charakterisierung der Räume $\mathfrak{E}$ durch ihre Eigenschaft, daß die einfache offene Gruppe ihrer Bewegungen die kleinste Dimensionszahl besitzt, die für diese Gruppe überhaupt möglich ist.

Im dritten Abschnitt ergeben sich wichtige Sätze über die einfachen Gruppen. Zunächst weist Verf. auf einen Zugang zum Satz von der unitären Beschränkbarkeit hin; leider ist es ihm nicht gelungen, den Satz auf diesem viel versprechenden Weg zu beweisen. Dagegen beweist er den Satz von der unitären Umbildbarkeit der offenen einfachen Gruppen $\mathfrak{G}$, ohne auf die einzelnen Typen zurückzugehen, wie er es früher getan hat. Natürlich spielen die oben genannten isomorphen Involutionen von $\mathfrak{G}$ beim Beweis eine große Rolle.

Im letzten Abschnitt bestimmt Verf. wiederum alle offenen Typen der vier großen Klassen einfacher Gruppen.

Reviewer: Freudenthal, Dr. H. (Amsterdam)