Cartan, E.

Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés. (French)

JFM 56.1193.02
Mathematica 4, 114-136 (1930).

F. Engel hat gelegentlich die Invarianten der Differentialform

$$\alpha(x,y,y')\,dx+\beta(x,y,y')\,dy'$$

gegenüber der Gruppe der ebenen Berührungstransformationen studiert (vgl. *F. Engel*, Zur Flächentheorie I, Berichte Leipzig 53 (1901), 404-412; F. d. M. 32, 613 (JFM 32.0613.*)), wobei der Sonderfall

$$\sqrt{E+2Fy'+Gy'^2}\,dx$$

(E, F, G Funktionen von x, y) auf die Existenz einer kovarianten infinitesimalen Berührungstransformation führt, die als Dilatation auf der Fläche mit der ersten Grundform

$$E\,dx^2+2F\,dx\,dy+G\,dy^2$$

gedeutet werden kann. Veranlaßt durch diese Untersuchung behandelt Verf. den allgemeinen Fall:

$$\omega=F(x,y,y')\,dx+\varPhi(x,y,y')\,dy'.$$

Vermöge neu eingeführter Hilfsvariablen u_1, u_2, …, u_5 reduziert sich die Äquivalenztheorie zweier derartiger Formen ω auf die der Kompatibilität der *Pfaff*schen Gleichungen

$$\overline{\omega}_i=\omega_i,$$

unter ω_i die *Pfaff*schen Formen

$$\begin{aligned}\omega_1&=F dx+\varPhi dy'+u_1(dy-y'dx),\\ \omega_2&=u_2(dy-y'dx),\\ \omega_3&=u_3dx+u_4dy+u_5dy'\end{aligned}$$

verstanden. Man hat dann zunächst für die bilinearen Kovarianten die Relationen

$$\overline{\omega}'_i=\omega'_i$$

zu fordern. Dabei stellen sich die Differentialinvarianten der Form ω als Koeffizienten der bilinearen Kovarianten ω'_i, ausgedrückt vermöge der Formen ω_1, ω_2, ω_3, sowie als deren (der Koeffizienten) sukzessive kovariante Ableitungen heraus.

Sind I, J, K die erwähnten (Koeffizienten-)Invarianten und schreibt man

$$\omega'=\sum_i[dA_idx_i]\qquad(\omega(d)=\sum_i A_idx_i),$$

so gilt:

$$\omega'_1=-[\omega_2\omega_3],\quad \omega'_2=[\omega_1\omega_3]-I[\omega_2\omega_3],\quad \omega'_3=-K[\omega_1\omega_2]-J[\omega_2\omega_3].$$

Diese Relationen betrachtet jetzt Verf. als "Strukturgleichungen" eines allgemeinen metrischen Raumes. Sie werden so in die allgemeine Klasse "nicht holonomer Räume einer Fundamentalgruppe" einbezogen, wobei nicht der Punkt (x,y), sondern das Stützelement (x,y,y') als Raumelement aufzufassen ist. Man kann dann in der Umgebung eines Stützelementes, aber nicht in der Umgebung eines Punktes alle Elementarbegriffe der euklidischen Geometrie benützen.

Durch eine Berührungstransformation kann die Funktion $\varPhi$ stets zum identischen Verschwinden gebracht werden. Damit tritt die entwickelte Theorie in enge Beziehungen zum Variationsproblem

$$\delta \int F(x,y,y')\,dx, \tag{*}$$

sie wird zur Invariantentheorie des Integrals $\int F\,dx$ gegenüber der Gruppe der Punkttransformationen. Man wird daher erwarten, daß die aus dem Variationsproblem (*) entwickelten Theorien allgemein metrischer Räume (*G. Landsberg*: Jahresbericht D. M. V. 16 (1907), 36-46, 547-551; Math. Ann. 65 (1908), 313-349. *P. Finsler*: Diss. Göttingen 1918. *L. Berwald*: J. f. M. 156 (1927), 191-222; M. Z. 25 (1926), 40-73. F. d. M. 38, 405 (JFM 38.0405.*); 39, 439; 46, 1131; 53, 689; 52, 727) in dieser Theorie als Spezialfälle erscheinen. Tatsächlich gelangt Verf. durch geeignete einschränkende Voraussetzungen von den Räumen "ohne Streckenkrümmung" durch die *Berwald*schen Raumklassen herab bis zu *Riemann*schen Räumen ($I \equiv 0$) und zu euklidischen Ebenen ($I = J = K \equiv 0$). Die hier entwickelten Problemstellungen haben seither für Verf. und andere den Anstoß zu einer Reihe weiterer Untersuchungen gegeben, deren Früchte stets aus den hier (und früher) gelegten begrifflichen Grundlagen (Fundamentalgruppen, Holonomiegruppen, Berührungselemente, Stützelemente usw.) hervorgehen (vgl. *É. Cartan*: Actualités scientifiques et industrielles Nr. 72, 79 (1933, 1934). *M. Haimovici*: C. R. 198 (1934), 1105-1108; 199 (1934), 1091-1093. *P. Delens*: Actualités scientifiques et industrielles Nr. 80 (1934). *H. M. Wegener*: Diss. Prag 1935. F. d. M. 59_{II}, 60, 61).

Reviewer: Pinl, M., Dr. (Berlin)