Kuratowski, C.

Sur le problème des courbes gauches en topologie. (French) JFM 56.1141.03

Fundamenta 15, 271-283 (1930).

Eines der interessantesten (und schwierigsten) topologischen Probleme besteht in der gestaltlichen Charakterisierung jener topologischen Räume, die mit Teilmengen des euklidischen n-dimensionalen Raumes homöomorph sind. Dieses Problem wird vom Verf. für $n = 2$ in Angriff genommen und einer teilweisen Lösung zugeführt. Er beschränkt sich auf *Peano*sche (= lokal zusammenhängende) Kontinua, die *nur endlich viele einfache geschlossene Kurven enthalten*, und zeigt, daß ein derartiges Kontinuum, *falls es nicht plättbar ist* (d. h. kein topologisches Bild in der Ebene besitzt) *eine der folgenden zwei topologischen Konfigurationen enthält*: (1) die Kurve bestehend aus den Kanten eines Tetraeders und einer die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten verbindenden Strecke; (2) die Kurve, bestehend aus den Kanten eines Tetraeders und den vier Verbindungsstrecken zwischen dem Schwerpunkt und den Eckpunkten des Tetraeders. Es ist klar, daß die angeführte Bedingung auch hinreichend dafür ist, daß das Kontinuum nicht plättbar sei.

Der Grundgedanke des Beweises sei kurz angedeutet: Man kann offenbar annehmen, daß jedes Teilkontinuum von C, das eine kleinere Anzahl einfacher geschlossener Kurven als C selbst enthält, plättbar ist. Verf. benützt nun ein Resultat von *Ayres*, wonach ein nicht plättbares *Peano*sches Kontinuum zwei Punkte a und b enthalten muß, die sich durch drei bis auf die Punkte a, b fremde einfache Bögen verbinden lassen. Daraus folgert Verf., daß sich C in zwei Kontinua M und N zerlegen läßt, die nur die Punkte a und b gemeinsam haben, wobei M eine durch diese beiden Punkte hindurchgehende einfache geschlossene Kurve enthält. Jedes der Kontinua M und N enthält offenbar weniger geschlossene Kurven als C, folglich sind M und N plättbar. Andererseits läßt sich zeigen, daß M nach Hinzufügung eines bis auf Endpnnkte zu M fremden Bogens ab die Plättbarkeit einbüßt. (Sonst ließe sich die Haftbarkeit der Summen $M + N$ beweisen im Gegensatz zur Annahme.)

Alles ist jetzt auf das Stadium der ebenen Kontinua zurückgeführt. Aus den erwähnten Eigenschaften von M wird hergeleitet, daß unter den Teilkontinua von M eine Kurve vorkommen muß, die nach Ergänzung um einen außerhalb M verlaufenden Bogen ab (also insbesondere um einen Teilbogen von N mit den Endpunkten a und b) eine der beiden oben angeführten räumlichen Kurven ergibt.

Verf. bemerkt, daß der Satz für Kontinua, die unendlich viele einfache geschlossene Kurven enthalten, im allgemeinen seine Gültigkeit verliert; doch bleibt der Satz richtig für *triangulierbare Flächen* (die zweidimensionale Sphäre S_2 ausgenommen). Eine von der S_2 verschiedene nicht plättbare triangulierbare Fläche enthält sogar *beide* Kurven (1) und (2).

Reviewer: Hurewicz, W., Dr. (Amsterdam)

Full Text: DOI EuDML