Siegel, C. L.
Über die Perioden elliptischer Funktionen. (German) JFM 58.0395.01
J. f. M. 167, 62-69 (1932).

Es seien ω_1, ω_2 die Perioden der elliptischen $\mathfrak{p}$-Funktion, g_2, g_3 ihre beiden Invarianten. Dann beweist Verf. daß nicht alle vier Größen $\omega_1, \omega_2, g_2, g_3$ algebraische Zahlen sein können. Insbesondere ist somit das Verhältnis des Umfanges der Lemniskate zu ihrem Durchmesser, nämlich $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ transzendent. Zum Beweise verwendet Verf. die *Gelfond*sche Methode der verallgemeinerten *Newton*schen Interpolationsformel. Sind $x_1, \dots, x_n$ Punkte in Innern des einfachzusammenhängenden, von einer rektifizierbaren Kurve C begrenzten Bereiches, in welchem $f(x)$ regulär ist, so gilt:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + \dots + a_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) + \\ (x - x_1) \dots (x - x_n) R_n(x),$$

wo $R_n(x)$ im Bereiche ebenfalls regulär ist. Die a sind konstant und lassen sich durch die Differentialquotienten von $f(x)$ an den Stellen x_1 bis x_n darstellen. Nun wachsen die Nenner der Koeffizienten der Reihe von $\mathfrak{p}(z)$ weniger als $\gamma^{n \log^2 n}$. Man nimmt $(2N + 1)^2$ zum Nullpunkt symmetrisch gelegene Gitterpunkte und umschließt sie mit der Kurve C. Ist dann $Q(x)$ eine ganze rationale Funktion, die an den Gitterpunkten Nullstellen zweiter Ordnung hat, so ist $Q(x)\mathfrak{p}(x)$ in C regulär. Auf diese Funktion wendet man die obige Formel an, für die Gitterpunkte $0, 1\omega_1, 2\omega_1, \dots, n\omega_1$ als Punkte x_1 bis x_{n+1}, jeden $(2N + 1)^2$ mal genommen. Verf. zeigt, daß es a mit bestimmt abgeschätzten Indices gibt, die $\neq 0$ sind. Andererseits sind diese a rationale Funktionen von $\omega_1, \omega_2, g_2, g_3$ mit rationalen Koeffizienten, die, mit h und einer Potenz von ω_1 multipliziert, ganz mit ganzen Koeffizienten werden, wo h abgeschätzt werden kann. Sind $\omega_1, \omega_2, g_2, g_3$ algebraische Zahlen, so ist a eine algebraische Zahl, deren Norm man ebenfalls abschätzen kann. Die beiden Abschätzungen führen für $n = (\log(2N + 1)^2)^2$ zu einem Widerspruch. (III 9.)

Reviewer: Fueter, R., Prof. (Zürich)

Full Text: DOI Crelle EuDML