Wiener, N.
The Fourier integral and certain of its applications. (English) JFM 59.0416.01
Cambridge, University Press. XII+201 p (1933).

In der Einleitung weist Verf. zunächst (§ 1) auf die Bedeutung der harmonischen Analyse für die Operatorenrechnung hin, insbesondere für das Rechnen mit solchen (von *Valterra* betrachteten) linearen Operatoren T, die die Eigenschft

$$\text{aus} \quad T(f)=g, f(x+h)=f_1, g(x+h)=g_1, \quad \text{folgt} \quad T(f_1)=g_1$$

besitzen, und gibt unter diesem Gesichtspunkt eine kurze Übersicht über den Inhalt des Buches. §2 der Einleitung enthält (teils mit, teils ohne Beweise) einen Abriß der *Lebesgue*schen Maß- und Integrationstheorie einschließlich der elementaren Eigenschaften des *Stieltjes*schen Integrals sowie der *Schwarz*schen, *Hölder*schen und *Minkowski*schen Ungleichung. In §3 wird der *Fischer-Riesz*sche Satz in der *Weyl*schen Fassung bewiesen. Beim Beweis ergibt sich das im folgenden oft angewendete Prinzip (X_{41}): Aus l. i. m. $f_n(x)=f(x)$ und $\lim f_n(x)=g(x)$ folgt $f\equiv g$ fast überall. Das Zeichen l. i. m. bedeutet dabei Konvergenz im Mittel in bezug auf $(-\infty,+\infty)$. An einem Beispiel wird gezeigt, daß weder aus der Konvergenz im Mittel die gewöhnliche Konvergenz, noch aus der gewöhnlichen Konvergenz die Konvergenz im Mittel folgt. In §4 werden die bekannten Begriffsbildungen und Sätze bei Orthogonalsystemen besprochen, z. B. die Vollständigkeit, der *Parseval*sche Satz, die Vollständigkeit der trigonometrischen Funktionen und dergl.

Kap. I ist dem Beweis des *Plancherel*schen Satzes gewidmet. In §5 werden die Reziprozitätsformeln für die *Fourier*transformierten g einer Funktion f zunächst heuristisch durch formalen Grenzübergang aus der *Fourier*reihe aufgestellt und an einigen Beispielen verifiziert. Die Schlußbemerkung, daß (formal) der Operator $\frac{d^2}{dx^2}-x^2$ bei *Fourier*transformation invariant bleibt, führt in §6 zur Betrachtung der Gleichung

$$\omega''-x^2\omega=\lambda\omega$$

und damit zu den *Hermite*schen Polynomen und Funktionen. §7 behandelt die erzeugenden Funktionen. Ist $H_n(x)$ das n-te *Hermite*sche Polynom und $\psi_n(x)$ die durch Normierung in bezug auf $(-\infty,+\infty)$ aus $H_n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ hervorgehende Funktion, so wird mit Hilfe der erzeugenden Funktion für die ψ_n eine Integralgleichung für

$$K(x,y,t)=\sum_0^\infty t^n\psi_n(x)\psi_n(y)$$

aufgestellt und durch deren Lösung ein geschlossener Ausdruck für diese Reihe gefunden. Unter Benutzung dieses Ausdrucks, des *Fischer-Riesz*schen Theorems und des Prinzips (X_{41}) wird am Schluß von §7 die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)K(x,y)dy\sim\sum_0^\infty t^n\psi_n(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)dy$$

bewiesen, die in §8 als Ausgangspunkt für den Beweis der Abgeschlossenheit der *Hermite*schen Funktionen dient. Nunmehr läßt sich zeigen, daß die Funktion

$$g(x)=\underset{t\to 1-0}{\text{l. i. m.}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)K(x,y,-it)dy$$

existiert, wenn $f\subset L_2$, d. h. im *Lebesgue*schen Sinn quadratisch integrierbar ist. Auf Grund des gefundenen Ausdrucks für K erweist sich bei formalen Grenzübergang g sofort als identisch mit der *Fourier*transformierten von f. Der exakte Nachweis für diese Identität wird in §9 geführt; da f sich in entsprechender Weise als *Fourier*transformierte von g erweist, ist der *Plancherel*sche Satz bewiesen.

Historische Angaben über andere Beweise des Satzes sowie ein Zusatz über den *Parseval*schen Satz für das *Fourier*integral beschließen das Kapitel.

Kap. II ist dem Beweis des allgemeinen *Tauber*schen Satzes gewidmet. Verf. versteht hierunter die folgenden zwei Sätze:

Satz 4. $K_1(x), K_2(x)$ mögen zu L_1 gehören, und die *Fourier*transformierte von K_1 möge keine reelle Nullstelle haben. $f(x)$ sei in $(-\infty, +\infty)$ beschränkt. Dann folgt aus dem Bestehen von

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)f(y)dy = A \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx \tag{1}$$

für $K = K_1$ die Richtigkeit für $K = K_2$.

Satz 5. M_1 sei die Unterklasse von L_1 aller der Funktionen $K(x)$, für die

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Max}|f(x)| \qquad (n \leqq x \leqq n+1)$$

konvergiert. K_1, K_2 seien zwei Funktionen aus M_1. Die *Fourier*transformierte von K_1 habe keine reelle Nullstelle. $f(x)$ sei eine Funktion, die in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist, und $\int_n^{n+1} |dg(x)|$ sei in $(-\infty, \infty)$ beschränkt. Aus dem Bestehen der Gleichung

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)dg(y) = A \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx \tag{2}$$

für $K = K_1$ folgt ihre Richtigkeit für $K = K_2$.

Die Notwendigkeit der Voraussetzung bezüglich der Nullstellen der *Fourier*transformierten von K_1 wird sofort an einem Beispiel gezeigt. Die beiden Sätze werden in einer etwas verallgemeinerten Form bewiesen. Versteht man nämlich unter der L_1-Ausdehnung $\varepsilon(\Sigma)$ einer zu L_1 gehörenden Funktionklasse Σ die Gesamtheit der Funktionen $K = K_2$, für die (1) immer dann (bei beschränktem f) gilt, wenn (1) für alle Funktionen $K = K_1$ aus Σ gilt, so ist Satz 5 enthalten in dem folgenden

Satz 6: Gibt es kein reelles Argument, für das die *Fourier*transformierte jeder Funktion aus Σ verschwindet, so ist $\varepsilon(\Sigma) = L_1$.

In ähnlicher Weise wird unter Verwendung der "M_1-Ausdehnung" $\varepsilon'(\Sigma)$ der Beweis von Satz 5 auf den eines allgemeineren Satzes 7 zurückgeführt. Es wird nun zunächst eine Reihe von Hilfssätzen aufgestellt, durch welche der Bereich der als zu $\varepsilon(\Sigma)$ bzw. zu $\varepsilon'(\Sigma)$ gehörend erkannten Funktionen schrittweise erweitert wird. Als weitere Hilfsmittel für den Beweis bringt §11 Sätze über Funktionen, deren *Fourier*transformierte für große Werte des Arguments verschwinden, und §12 Sätze über absolut konvergente *Fourier*reihen, insbesondere den Satz: Ist $f(x)$ eine stetige Funktion mit absolut konvergenter *Fourier*reihe, und ist $f(x) \neq 0$ in $(-\pi, \pi)$, so besitzt $\dfrac{1}{f(x)}$ ebenfalls eine absolut konvergente *Fourier*reihe. In §13 wird dann der endgültige Beweis der Sätze 6 und 7 gegeben. §14 handelt von der Vollständigkeit der aus einer Funktion $K_1(x)$ aus L_1 entstandenen Verschiebungsfunktionen $K_1(x - \Lambda_n)$ in dem Sinne, daß für jedes $K_2 \subset L_1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| K_2(x) - \sum_1^N A_n K_1(x - \Lambda_n) \right| dx \tag{3}$$

durch Wahl von N, reeller Zahlen Λ_n und komplexer Zahlen $A_n (n = 1, 2, \dots, N)$ beliebig klein gemacht werden kann. Hierfür erweist sich als hinreichend und auch notwendig, daß die *Fourier*tramsformierte von K_1 keine reellen Nullstellen hat. §15 behandelt das entsprechende Problem für Funktionen aus L_2. Hier wird verlangt, daß das Integral über das Quadrat des Integranden von (3) beliebig klein wird.

Kap. III (Spezielle *Tauber*sche Sätze) behandelt Anwendungen der Allgemeinen *Tauber*schen Sätze. In

§16 wird der ursprüngliche *Tauber*sche Satz in der verschärften *Littlewood*schen Fassung: Ist

$$f(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$$

für $|x| < 1$, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = s$ und $n|a_n|$ beschränkt, so gilt $\sum a_n = s$, durch Zurückführung auf Satz 4 bewiesen. Der einfachere Beweis von *Karamata* wird ebenfalls angegeben; Verf. bemekrt jedoch, daß diese einfachere Methode im Anwendungsbereich beschränkter ist als die seinige. Schließlich wird gezeigt, daß der *Tauber-Littlewood*sche Satz auch unter der schwächeren Voraussetzung $na_n > -K$ gültig bleibt.

Die drei folgenden Paragraphen behandeln Anwendungen der allgemeinen *Tauber*schen Sätze auf Probleme der analytischen Zahlentheorie. §17 enthält den Beweis des Primzahlsatzes

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$$

in der Form

$$\lim \frac{1}{N} \sum_1^N \Lambda(n) = 1 \tag{4}$$

($\pi(n)$ Anzahl der Primzahlen $\leqq n$; $\Lambda(n) = \log p$ wenn n Potenz der Primzahl p, sonst gleich Null). Es wird zunächst bewiesen, daß (2) gilt mit

$$A = 1, \quad g(y) = \sum_1^{[\exp y]} \frac{\Lambda(n)}{n},$$
$$K(x) = K_1(x) = e^{-x} \frac{\exp(-2e^{-x}) - \exp(-e^{-x}) + e^{-x} \exp(-e^{-x})}{(\exp(-e^{-x}) - 1)^2}$$

und nach Satz 5 daher auch für jedes $K = K_2 \subset M_1$, falls das Nichtvorhandensein reeller Nullstellen der *Fourier*transformierten von K_1 bewiesen ist. Bei passender Wahl eines von einer willkürlichen Konstanten ε abhängenden $K = K_2$ kann Verf. nun aus (2)

$$1 + \frac{\varepsilon}{2} > \limsup \frac{1}{N} \sum_1^N \Lambda_n$$

schließen; analog erhält er durch passend gewähltes andres K_2

$$e^{-\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqq \liminf \frac{1}{N} \sum \Lambda_n,$$

so daß (4) folgt. Die noch zu beweisende Tatsache bezüglich der Nullstellen der *Fourier*transformierten erweist sich in §18 äquivalent damit, daß die *Riemann*sche ζ-Funktion auf der Geraden $\Re(\omega) = 1$ keine Nullstellen hat, wofür der Beweis erbracht wird. Ein Vergleich der von Verf. zum Beweis des Primzahlsatzes angewendeten Methode mit denen andrer Autoren beschließt diesen Paragraphen. In §19 wird ein Satz von *Ikehara* (An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers, Journ. of Math. Massachusetts 10 (1931), 1-12; F. d. M. 57) durch Zurückführung auf Satz 7 bewiesen. Mit *Stieltjes*schen Integralen geschrieben lautet der Satz: Es sei $\alpha(x)$ eine monoton wachsende Funktion; es konvergiere

$$\int_{1+0}^\infty x^{-u} d\alpha(x) = f(u)$$

für $\Re(u) > 1$, und es konvergiere

$$g(u) = f(u) - \frac{A}{u-1}$$

in jedem endlichen Intervall von $\Re(u) = 1$ gleichmäßig gegen einen endlichen Grenzwert, wenn $\Re(u) \to 1+0$. Dann ist $\alpha(N) \sim NA$ für $N \to \infty$. Durch Spezialisierung erhält man einen Satz von *Landau* (1907; F. d. M. 38, 295 (JFM 38.0295.*)-296), wobei sich eine *Landau*sche Voraussetzung $F(x) = O(|x|^\alpha)$ als überflüssig erweist. Ferner wird aus dem *Ikehara*schen Satz ein von *Hardy* und *Littlewood* herrührender

Satz (1918; F. d. M. 46, 498 (JFM 46.0498.*)-499) abgeleitet, wobei sich eine von *Hardy* und *Littlewood* gemachte Voraussetzung $F(x) = O(\exp(c|t|))$ als überflüssig erweist, wenn man dafür eine bei *Hardy* und *Littlewood* auftretende voraussetzung $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \to 1$ durch die schärfere: $\lambda_n - \lambda_{n-1}$ beschränkt, ersetzt. Sodann gibt Verf. einen zweiten auf dem *Ikehara*schen Satz beruhenden Beweis des Primzahlsatzes und wirft zum Schluß die Frage auf, ob es möglich sei, auch feinere Formen des Primzahlsatzes

$$\pi(n) - \frac{n}{\log n} = O(n^\alpha) \qquad (\frac{1}{2} < \alpha < 1)$$

mit seiner Methode zu bewiesen; er glaubt, diese Frage verneinen zu müssen.

§20 enthält einige Sätze über den quadratischen Mittelwert einer Funktion; es seien die beiden folgenden angeführt. da sie im weiteren Verlauf des Buches gebraucht werden. Satz 22: Ist

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx$$

beschränkt für $T \to \infty$, so existiert

$$s_1(u) = \operatorname*{l.\,i.\,m}_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_1^A \frac{f(x)e^{-iux}}{-ix} dx + \int_{-1}^{-A} \frac{f(x)e^{-iux}}{-ix} dx \right\}.$$

Setzt man noch

$$s_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} f(x) \frac{e^{-iux} - 1}{ix} dx$$

und $s(u) = s_1(u) + s_2(u)$, so gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du$$

in dem Sinne, daß entweder beide Limites existieren oder beide nicht existieren. -Im gleichen Sinne gilt Satz 21: Ist $\Phi \geqq 0$ $(0 \leqq x < \infty)$, so ist

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(x) dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2}{\pi\varepsilon} \int_0^\infty \Phi(x) \frac{\sin^2 \varepsilon x}{x^2} dx.$$

Kap. IV trägt die Überschrift "Verallgemeinerte harmonische Analyse". In §21 wird der Begriff des Spektrums einer Funktion $f(x)$ eingeführt. Ist f meßbar, so sagt man: f gehört zu S, wenn

$$\Phi(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \bar{f}(\xi) f(x+\xi) d\xi$$

existiert. Ist überdies $\Phi(x)$ stetig, so sagt man: f gehört zu S'. Im Spezialfall

$$f(x) = \sum_1^N A_j e^{i\lambda_j x} \tag{5}$$

wird

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^N |A_j|^2 e^{i\lambda_j x}. \tag{6}$$

Verf. berechnet zunächst für einige weitere Funktionen f die zugehörige Funktion Φ und beweist einige Sätze über Φ, von denen der folgende genannt sei: Satz 27: Gehört f zu S, hat $s(u)$ dieselbe Bedingung wie in Satz 22, und setzt man

$$\Phi_\varepsilon(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du,$$

so gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_\varepsilon(y) = \Phi(y).$$

Nunmehr bezeichnet Verf. mit $\sigma(u)$ diejenige Funktion, die aus $s(u)$ entsteht, wenn man f durch Φ ersetzt, und mit $\sigma_\varepsilon(u)$ diejenige, die aus $\sigma(u)$ entsteht, wenn man Φ durch Φ_ε ersetzt. Unter Benutzung des *Fischer-Riesz*schen Satzes, des Prinzips (X_{41}) und des Satzes 27 ergibt sich nun:

$$\sigma(u) = \text{const} + \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_0^u |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du.$$

Im Spezialfall (5) erweist sich $\sigma(u)$ als eine Funktion, die bei $u = \lambda_j$ einen Sprung der Größe $\sqrt{2\pi}|A_j|^2$ macht und sonst konstant ist. Die physikalische Interpretation führt daher dazu, $\sigma(u)$ als Spektrum von f zu bezeichnen. §21 endet mit der Berechnung von σ für einige weitere Funktionen f.

§22 beschäftig sich mit einer Gruppe von Sätzen über Spektra von Funktionen der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) f(\xi) d\xi$$

mit beschränktem

$$\frac{1}{2B} \int_{-B}^{B} |f|^2 dx.$$

Erwähnt sei nur das Lemma 30a: Ist $f(x) \subset S$, so ist σ reell und kann als monoton wachsende Funktion definiert werden.

In §23 beschäftig sich Verf. näher mit dem Spektrum σ. Es seien hier zwei im folgenden gebrauchte Sätze angeführt. Satz 32: Ist $f(x) \subset S$, ist σ gemäß Lemma 30a definiert, und sind u_n die Sprünge von σ, so ist

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\Phi|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \sum \{\sigma(u_n+0) - \sigma(u_n-0)\}^2.$$

Satz 33: Setzt man

$$\Phi(x) - \sum \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{\sigma(u_n+0) - \sigma(u_n-0)\} = \psi(x),$$

so gilt unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 32:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\psi(x)|^2 dx = 0.$$

In §24 werden die fastperiodischen Funktionen eingeführt, das von *Bohr* bewiesene *Weierstraß*sche und *Parseval*sche Theorem für diese Funktionen formuliert und eine Reihe elementarer Eigenschaften bewiesen. §25 erbringt zunächst den Beweis des folgenden Lemmas, das als eine Verallgemeinerung von (6) angesehen werden kann: Zu fastperiodischem f gibt es eine Folge von reellen Zahlen λ_n und von positiven Zahlen B_n mit konvergenter ΣB_n, so daß

$$\Phi(x) = \Sigma B_n e^{i\lambda_n x}$$

gilt. Dieser Beweis beruht außer auf den Sätzen des §24 auf den Sätzen 32 und 33. Unter Benutzung der Sätze aus §24 folgt aus diesem Lemma der *Weierstraß*sche und aus diesem wiederum der *Parseval*sche Satz. Eine kurze Diskussion der von andren Autoren für diese beiden Sätze gegebenen Beweise beschließt das Buch. (III 8; IV 3 D, 4.)

Reviewer: Rothe, E., Dr. (Breslau)