Steinitz, E.
Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluß der Elemente der Topologie.
(German) JFM 60.0497.01
Aus dem Nachlaß herausgegeben und ergänzt von H. Rademacher. VIII + 351 S. 190 Abb. Berlin, J. Springer (Die Grundlehren der mathematischen wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete Bd. 41) (1934).

Aus dem Vorwort des Herausgebers: "In den letzten Jahren seines Lebens arbeitete *Ernst Steinitz* (gest. 29. 9. 1928) an einer zusammenfassenden Darstellung der Theorie der Polyeder, die er in mehreren Einzelpublikationen und auch in zwei Vorlesungen in Kiel (Wintersemester 1920/21 und 1923/24) behandelt hat. In seinem Nachlaß fand sich ein unvollendetes Manuskript zu dem geplanten Buche. Bei genauer Durchsicht ergab sich, daß diese Aufzeichnungen fast druckfertig waren und den größeren Teil eines breit angelegten Werkes bildeten, $\cdots$. Es konnte keinem Zweifel unterliegen, daß das nachgelassene Werk der mathematischen Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden mußte, nicht nur aus Pietät vor dem Namen *Steinitz*, sondern vor allem auch seiner inneren Qualität und Eigentümlichkeit helber."

"Das Manuskript bestand aus zwei dünnen Quartheften, von der Hand von *Steinitz* selber eng vollgeschrieben, und aus einer großen Zahl geordneter Einzelblätter, die nach seinem Diktat geschrieben worden sind. Es weist eine deutliche Lücke im zweiten Kapitel des zweiten Abschnittes auf, beginnt dann wieder mit dem dritten Kapitel und bricht im zweiten Kapitel des dritten Abschnittes ab. Die vornehmliche Aufgabe des Herausgebers bestand darin, diese Lücken auszufüllen und das Werk zum Abschluß zu bringen. Leider fand sich keinerlei Entwurf oder Gesamtdisposition im Nachlaß. Als Grundlage für die Herausgabe standen nur zur Verfügung der Enzyklopädieartikel "Polyeder und Raumeinteilung"" (III, 1, Artikel 12) "der keineswegs nur Bekanntes referiert, sondern an vielen Stellen ohne besondere Nennung des Urhebers eigene Forschungen von *Steinitz* in skizzenhafter Darstellung enthält und die eigenhändigen Notizen *Steinitz*ens zu seinen obenerwähnten Kieler Vorlesungen. Glücklicherweise enthielten die beiden Vorlesungen je einen der beiden rein geometrischen Beweise des "Fundamentalsatzes der konvexen Polyeder", die in jenem Enzyklopädieartikel nur kurz angedeutet sind. Der genauen Anlage des Buches nach sollten offenbar die konvexen Polyeder und ihre topologischen Typen das Ziel des Buches sein. Der Herausgeber hat die Ergänzungen in dieser Richtung angebracht und überhaupt nur solche Untersuchungen hinzugefügt, die an irgendeiner Stelle des Buches schon angeschnitten waren."

"Was das Technische der Herausgeberarbeit angeht, so waren vor allem die Abbildungen zu zeichnen, für die sich in dem *Steinitz*schen Manuskript nur an ganz wenigen Stellen kleine Skizzen befanden, obgleich sich *Steinitz* danuernd auf Abbildungen sogar mit angegebenen Bezeichnungen bezieht. Ergänzt wurden vom Herausgeber die Peragraphen 36 bis 42" (aus dem zweiten Abschnitt, Kap. II) "und 60 bis 69" (aus dem dritten Abschnitt, Kap. II+III). "für die in ganz verschiedenem Maße Notizen von *Steinitz* vorlagen $\cdots$. Im Text sind diese hinzugefügten Paragraphen nicht mehr besonders kenntlich gemacht worden, dagegen sind, schon der historischen Treue wegen, alle vom Herausgeber vorgenommenen Einschaltungen in den von *Steinitz* selbst herrührenden Text in eckige Klammern gesetzt, abgesehen natürlich von den notwendigen Verweisungen und Literaturangaben."

Aus dem Inhalt: Erster Abschnitt: *Historische Übersicht über die Entwicklung der Lehre von den Polyedern.* Zunächst wird über die *Euler*sche Theorie der Morphologie konvexer Polyeder berichtet. Sind e, k, f die Anzahlen der Ecken, Kanten, Flächen eines konvexen Polyeders, sodaß also $e + f = k + 2$ und ferner

$$e \leqq 2f - 4, \quad f \leqq 2e - 4 \tag{*}$$

gilt, so werden in eine Klasse genau alle Polyeder zusammengefaßt, die in den Anzahlen e und f übereinstimmen. Es wird die von *Euler* vermutete Tatsache bewiesen, daß es zu jedem (*) genügenden Paar natürlicher Zahlen e, f wirklich eine Klasse von konvexen Polyedern gibt. *Euler* hat diese Klasseneinteilung durch Einführung der Anzahlen f_i der i-Ecke und e_i der i-kantigen Ecken ($i = 3, 4, \dots$) des Polyeders verfeinert; doch ist für den der Theorie der Morphologie zugrundegelegten, hier allerdings zunächst nicht mit der nötigen Schärfe definierten "Isomorphismus" zweier konvexer Polyeder die Übereinstimmung sämtlicher Zahlen e, f, e_i, f_i nicht hinreichend. Um nun die Darstellung besser zu fundieren, trägt Verf. die Anfangsgründe der Flächentopologie vor und entwickelt dann den Begriff des allgemeinen ebenen Polygons und des allgemeinen Polyeders, insbesondere den des "gewöhnlichen" Polyeders. Dann werden die Invarianten der Flächentopologie aufgestellt, und es wird die Darstellung der topologisch verschiedenen Flächentypen in einigen Räumen, zumal im dreidimensionalen euklidischen und projektiven Raum, besprochen. Als Anwendung wird der aus einem topologischen und einem metrischen Teil bestehende *Cauchy*sche Beweis des von *Legendre* vermuteten Satzes, daß zwei konvexe Polyeder kongruent sind, wenn ihre entsprechenden Flächen kongruent sind, vorgetragen und das *Legendre*sche Problem der Bestimmung der Konstantenzahl eines Polyeders besprochen; dabei handelt es sich um die Bestimmung der genauen Anzahl der zur Konstruktion eines Polyeders, abgesehen von der Lage im Raum, erforderlichen Bestimmungsstücke. Verf. führt hier die "Inzidenzmatrix"

$$(c_{ij}) \qquad (i = 1, \dots, f; \quad j = 1, \dots, e)$$

eines Polyeders ein. Die Zeilen dieser Matrix entsprechen den Flächen, die Spalten den Ecken des Polyeders, und es ist $c_{ij} = 1$ oder 0, je nachdem die i-te Ebene und die j-te Ecke inzident sind oder nicht. Die Inzidenzmatrix spielt auch in den weiteren Untersuchungen des ersten Abschnittes eine Rolle. Mit der Formulierung des allgemeinen Problems der kombinatorischen Aufstellung der Typen konvexer Polyeder schließt der Abschnitt.

Zweiter Abschnitt: *Polyedrische Komplexe.* Zur Behandlung des am Schluß des ersten Abschnittes formulierten Hauptproblems werden im zweiten Abschnitt rein kombinatorische Betrachtungen angestellt und Schemata behandelt, die Verf. als polyedrische Komplexe bezeichnet, ohne Rücksicht darauf, ob ein solches Schema geometrisch durch ein Polyeder im Sinne der früher gegebenen Definition realisiert werden kann; die Untersuchung verläuft also durchaus im Sinne der kombinatorischen Topologie. Unter einem "geordneten Komplex" $\mathfrak{C}$ versteht Verf. ein System von Elementen $\mathfrak{a}$, wenn jedem Element genau eine der drei Zahlen 0, 1, 2, - seine Dimension - zugeordnet ist, wenn für jedes Elementenpaar $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ verschiedener Dimensionen feststeht, ob es inzident ist oder nicht, und wenn diese Inzidenzbeziehung die Eigenschaft der Transivität besitzt: Ist ein Element zweiter Dimension (eine "Fläche") α mit einem Element erster Dimension (einer "Kante") a und dieses mit einem Element nullter Dimension (einer "Ecke") A inzident, so ist auch α mit A inzident. Nach Anstellung einiger Untersuchungen für diese allgemeine Komplexe führt Verf. insbesondere die "poliedrischen Komplexe" ein: Der Komplex $\mathfrak{C}$ heißt polyedrisch, wenn (1) jede Kante mit zwei Ecken, (2) jede Kante mit einer oder zwei Flächen inzident ist, (3) es zu jedem aus einer Ecke A und einer Fläche α bestehenden inzidenten Paar genau zwei Kanten a, b gibt, die sowohl mit A als auch mit α inzident sind, und (4) isolierte Ecken und Flächen, d. h. solche, die mit keinem andern Element inzident sind, nicht vorkommen. Die weitere Untersuchung wird dann auf "normale Komplexe" beschränkt, d. h. auf polyedrische Komplexe mit vollkommenem Zusammenhang; dabei nennt Verf. einen Komplex $\mathfrak{C}$ "volkommen zusammenhängend", wenn $\mathfrak{C}$ mindestens ein Element von jeder der drei Dimensionen 0, 1, 2 enthält, zusammenhängend ist und wenn das System der mit einer beliebigen Ecke oder Fläche von $\mathfrak{C}$ inzidente Elemente von $\mathfrak{C}$ zusammenhängend ist. Verf. beweist, daß die *Euler*sche Charakteristik eines normalen Komplexe stets $\leqq 2$, bei einem Komplexs mit r Rändern stets $\leqq 2 - r$ ist, und daß sie den Wert 2 nur bei geschlossenen Komplexen erreichen kann. Ist die Charakteristik genau gleich 2, so spricht Verf. von einem *Euler*schen Komplex.

Sowiet das erste Kapitel des zweiten Abschnitts. Kap. II handelt von der topologischen Äquivalenz normaler Komplexe - das äquivalenzproblem wird zunächst für orientierbare, dann für nicht orientierbare Komplexe erledigt -, Kap. III vom Polyeder im engeren Sinne. Die kombinatorische Definition des Polyederbegriffs ist enger als die des polyedrischen Komplexes: Ein polyedrischer Komplex $\mathfrak{C}$ heißt insbesondere ein "Polyeder", wenn jeder Winkel, d. h. ein aus einer Ecke A und einer Fläche α von $\mathfrak{C}$ bestehendes inzidentes Paar, durch seine beiden Schenkel, d. h. durch die mit A und α inzidenten Kanten, eindeutig bestimmt ist. Die Definition ist gleichwertig mit der folgenden Ausssage: ein polyedrischer Komplex ist ein Polyeder, wenn keine Fläche zweieckig und keine Ecke zweikantig ist. Den Polyedern werden gewisse Bedingungen auferlegt; unter diesen ist die wichtigste die "Bedingung des Nichtübergreifens": Sind die Ecken A, B mit den Flächen α, β inzident, so soll eine mit A, B, α, β inzidente Kante vorhanden sein. Ein Polyeder, das nun sowohl dieser Bedingung genügt als auch ein *Euler*scher Komplex ist, nennt Verf. ein K-Polyeder. Jedes konvexe Polyeder ist gewiß ein K-Polyeder. Umgekehrt läßt jedes K-Polyeder eine geometrische Realisierung als konvexes Polyeder zu; diese Aussage nennt Verf. den "Fundamentalsatz der konvexen Typen".

Dritter Abschnitt: *Geometrische Realisierung der Polyeder.* Nach den rein kombinatorischen Betrachtungen des zweiten Abschnittes bildet die Frage der geometrischen Realisierbarkeit der kombinatorisch definierten Polyeder den Gegenstand des dritten Abschnitts. Im Mittellpunkt steht der Fundamentalsatz der konvexen Typen, für den der Reihe nach drei Beweise gegeben werden. Der erste (Kap. I) arbeitet mit analytisch-geometrischen Methoden; der zweite und dritte sind rein geometrisch. Der zweite Beweis (Kap. II) macht nur von den Axiomgruppen der Verknüpfung und Anordnung der euklidischen Geometrie, die Verf. im wesentlichen in der bekannten *Hilbert*schen Fassung zugrunde legt, Gebrauch, insbesondere von den allein aus diesen Axiomgruppen herzuleitenden Tatsachen, daß jedes einfache Polygon die Ebene, und daß jedes einfache Polyeder (d. h. jedes *Euler*sche Polyeder, dessen Polygone sämtlich einfach sind) den Raum in genau zwei Gebiete zerlegt. Der dritte Beweis des Fundamentalsatzes (Kap. III) legt den projektiven Raum zugrunde, stellt daher die Axiome der Verknüpfung und Anordnung für den projektiven Raum an die Spitze und operiert mit Zerlegungsaussagen in der projekti ven Ebene und im projektiven Raum. Dabei spielt der Begriff "projektiv-konvex" eine Rolle: Eine ebene Punktmenge $\mathfrak{B}$ heißt in bezug auf eine Gerade w ihrer Ebene projektiv-konvex, wenn auf jeder Geraden g ihrer Ebene, die $\mathfrak{B}$ trifft, durch $\mathfrak{B}$ genau eine Strecke ausgeschnitten wird, die den Schnittpunkt von g und w nicht enthält. $\mathfrak{B}$ heißt projektiv-konvex schlechthin, wenn $\mathfrak{B}$ in bezug auf eine Gerade projektiv-konvex ist. Analog wird die Projektiv-Konvexität im Raum definiert. (V 1, 3.)

Reviewer: Feigl, G., Prof. (Breslau)