**Leray, J.**; **Schauder, J.**
**Topologie et équations fonctionnelles.** (French) JFM 60.0322.02
Annales École norm. (3) 51, 45-78 (1934).

Durch Übertragung eines fundamentalen Begriffes der Topologie endlich-dimensionaler Räume ( des *Brouwer*schen Grades einer Abbildung) auf Abbildungen eines abstrakten Raumes gelingt es, der Lösungsmenge von gewissen, nicht notwendig linearen Funktionalgleichungen vom Typus $x - F(x) = 0$ eine ganze Zahl, den Totalindex, zuzuschreiben, die invariant bleibt, wenn die Gleichung sich stetig ändert und die Lösungen gleichmäßig beschränkt bleiben.

Hieraus ergibt sich ein allgemeiner Weg für Existenztheoreme: Kann man eine solche Funktionalgleichung durch stetige Änderung in eine andere überführen, bei der sich leicht konstantieren läßt, daß ihr Totalindex von 0 verschieden ist, so weiß man, daß dies auch für die Ausgangsgleichung gilt. Daraus folgt dann die Existenz mindestens einer Lösung.

Diese Methode ist den sonstigen, auf sukzessiven Approximationen beruhenden Methoden besonders dadurch überlegen, daß sie über Existenz und lokale Eindeutigkeit der Lösungen der Übergangsschar keine Voraussetzungen macht.

So werden z. B. Existenzsätze für das *Dirichlet*sche Problem der allgemeinsten Gleichung vom elliptischen Typ abgeleitet, die die Resultate von *S. Bernstein* wesentlich erweitern.

I. Topologischer Grad von gewissen Funktionaltransformationen.

$\mathfrak{E}$ sei ein abstrakter linearer, vollständiger und normierter Raum im Sinne von *Banach*. $F(x)$ sei eine vollstetige Funktionaltransformation, die auf der abgeschlossenen Hülle $\overline{\omega}$ einer offenen, beschränkter Menge $\omega$ von $\mathfrak{E}$ definiert ist und deren Werte zu $\mathfrak{E}$ gehören. Dann wird die Transformation

$$y = x - F(x) \equiv \Phi(x)$$

betrachtet. Der Punkt $O$ gehöre nicht zum Bild $\Phi(\omega')$ des Rendes $\omega'$ von $\omega$. Es sei also

$$h = \text{kürzester Abstand von } O \text{ nach } \Phi(\omega') > 0.$$

$F_h(x)$ sei eine auf $\overline{\omega}$ definierte Funktionaltransformation, die $F$ bis auf $h$ annähert:

$$\|F(x) - F_h(x)\| < h,$$

und deren Werte einer endlichdimensionalen Untermenge von $\mathfrak{E}$ angehören. $\mathfrak{E}_{n_h}$ sei eine Untermenge von $\mathfrak{E}$ mit endlicher Dimensionszahl $n_h$, die alle Werte von $F_h(x)$ und mindestens einen Punkt von $\omega$ enthält. Der nichtleere Durchschnitt von $\omega$ und $\mathfrak{E}_{n_h}$ bildet eine offene beschränkte Menge $\omega_{n_h}$; ihr Rand $\omega'_{n_h}$ gehört zu $\omega'$. $\Phi(\omega'_{n_h})$ hat also von $O$ mindestens den Abstand $h$. Die Transformation

$$\Phi_h(x) \equiv x - F_h(x)$$

transformiert $\overline{\omega}_{n_h}$ in eine Menge $\Phi_h(\overline{\omega}_{n_h})$, die auch in $\mathfrak{E}_{n_h}$ liegt; sie approximiert $\Phi$ bis auf $h$; also ist

$$\text{kürzester Abstand von } O \text{ nach } \Phi_h(\overline{\omega}_{n_h}) > 0.$$

Daher hat $\Phi_h$ auf $\overline{\omega}_{n_h}$ "im Punkt 0"einen bestimmen "Grad"(*Brouwer*, 1911; F. d. M. 42, 417 (JFM 42.0417.*)). Dieser heißt der topologische Grad der Transformation $\Phi$ im Punkt $O$:

$$d[\Phi, \omega, O] = d[\Phi_h, \omega_{n_h}, O].$$

Durch die Transformation $x' = x - b$ kann man $d$ auch für jeden Punkt $b$, der nicht auf $\Phi(\omega')$ liegt, definieren. - $d$ ist unabhängig von der Wehl von $F_h(x)$ und $\mathfrak{E}_{n_h}$.

## II. Begriff des Index und Bestimmung des Grades.

$a$ sei ein Punkt von $\omega$ und $b$ sein Bild; $b = a - F(a) \equiv \Phi(a)$. Es wird vorausgesetz, daß eine hinreichend kleine Kugel $\|x - a\| < \varrho$ die einzige Lösung $x = a$ von $\Phi(x) = b$ enthält. Dann existiert in jeder Kugel $\Sigma(\theta)$:

$$\|x - a\| < \theta\varrho$$

der Grad $d[\Phi, \Sigma(\theta), b]$ und ist von $\theta$ unabhängig. Diese Zahl heißt der Index $i[\Phi, a]$ des Punktes $a$.

Ist $b$ das Bild von endlich vielen Punkten $a_1, \dots, a_\mu$ von $\overline{\omega}$, von denen keiner auf $\omega'$ liegt, so ist

$$d[\Phi, \omega, b] = \sum_{t=1}^{\mu} i[\Phi, a_l].$$

In diesem Fall läßt sich also der Grad aus den Indices berechnen.

Ist $\mathfrak{E}$ schwach kompakt, $F$ schwach stetig und $x - F(x)$ eineindeutig in der Umgebung eines Punktes $a$ von $\omega$, so sit $i[\Phi, a] = \pm 1$.

Wenn $F$ in $a$ ein vollstetiges *Fréchet*sches Differential $A(x)$ besitz, so ist der Index von $y = x - F(x)$ in $a$ gleich dem Index von $y = x - A(x)$, wenn dieser existiert.

## III. Theorie gewisser Funktionalgleichungen.

Es wird die Gleichung $x - F(x, k) = 0$ unter folgenden Annahmen betrachtet:

$(H)$ : $x$ und die Werte von $F$ gehören zu einem linearen, normierten und vollständigen Raum $\mathfrak{E}$; die $k$ erfüllen ein abgeschlossenes, reelles Intervall $K$; in dem Raum $[\mathfrak{E} \times K]$, der aus den Paaren $(x, k)$ besteht, wird die Entfernung so definiert: $\|(x, k) - (x', k')\| = \|x - x'\| + |k - k'|$; $F(x, k)$ ist auf der abgeschlossenen Hülle $\overline{\Omega}$ einer offenen und beschränkten Menge $\Omega$ von $[\mathfrak{E} \times K]$ definiert; $F(x, y)$ ist vollstetig auf $\overline{\Omega}$ und gleichmäßig stetig in $K$; der Rand $\Omega'$ von $\Omega$ enthält keine Lösung $(x, k)$ unseren Gleichung.

Der Grad der Transformation $y = x - F(x, k)$ im Punkte $y = 0$ soll der "Totalindex der Lösungen" der Gleichung heißen.

Weiter wird folgende Annahme gemacht: $(H')$: Für ein $k_0$ soll die Gleichung endlich viele Lösungen $a_1, \dots, a_\mu$ haben, die bekannt sind. Der Totalindex in $k_0$ sei von 0 verschieden. Dann gilt folgender Hauptsatz: Wenn für die Gleichung $x - F(x, k) = 0$ die Annahmen $(H)$ und $(H')$ gelten, so existiert im Raume $[\mathfrak{E} \times K]$ ein Kontinuum von Lösungen, längst dessen $k$ alle Werte aus $K$ annimmt.

## IV. Anwendungen.

In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, daß von vornherein die gleichmäßige Beschränktheit aller Lösungen bekannt ist, und der Hauptsatz für diesen Fall neu formuliert. Dann wird das *Dirichlet*sche Problem für die klassiche elliptische Gleichung und für allgemeinere Gleichungen umgeformt in eine Funktionalgleichung von dem in III. betrachteten Typ und der Hauptsatz angewendet. Das ergibt: Jede Gleichung von elliptischem Typus

$$a\left(x_1, x_2; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2b(\dots)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + c(\cdots)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$$

besitzt wenigstens eine Lösung, die in einem konvexen Gebiet $\Delta$ definiert ist und auf dem Rand $\Delta'$ vorgegebene Werte annimmt. (Der Fall, daß die $a, b, c$ nicht von $z$ abhängen und analytisch sind, ist von *S. Bernstein* behandelt worden (1908; F. d. M. 39, 431 (JFM 39.0431.*)); hier ist $z$ im Gegensatz zu oben sicher eindeutig.)

## V. Anwendungen (Forsetzung).

Hier werden Gleichungen vom Typus $G(x, x, k) = 0$ betrachtet von der Art, daß die Gleichung $G(x, X, k) = 0$ jedem System $(x, k)$ einen und nur einen Punkt $X$ zuordnet und die hierdurch definierte Transformation $X(x, k)$ vollstetig ist. Hierfür wird ein aus dem Fundamentalsatz fließender Satz aufgestellt, und dieser wird wieder auf Differentialgleichungen angewendet. Dies liefert z. B. folgendes Resultat:

Es sei eine Lösung $z(x_1, \ldots, x_n)$ der Gleichung zweiter Ordnung

$$f\left(x_1, \ldots, x_n; kz; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}; k\right) = 0$$

zu finden, die im Innern eines gegebenen Gebietes definiert ist und auf dem Rande verschwindet. Die Gleichung sei für $k = 0$ von elliptischem Typus und besitze eine Lösung, deren zweite Ableitungen eine *Hölder*sche Bedingung erfüllen. Variiert $k$ stetig, so besitz die Gleichung immer noch eine Lösung, solange nicht eine der beiden Möglichkeiten eintritt:

(a) Es ergibt sich eine Lösung, in deren Umgebung die Gleichung nicht von elliptischem Typ ist.

(b) Gewissen Werten des Parameters zwischen 0 und $k$ entsprechen Lösungen, von deren zweiten Ableitungen wohl jede eine *Hölder*sche Bedingung erfüllt, aber nicht alle dieselbe. (IV 13.)

Reviewer: Doetsch, G., Prof. (Freiburg)



**Full Text:** DOI Numdam EuDML