Whitney, H.

Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. (English) JFM 60.0217.01

Transactions A. M. S. 36, 63-89 (1934).

Verf. definiert zunächst die m-fache stetige Differenzierbarkeit einer Funktion f in einer abgeschlossenen Menge A des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n folgendermaßen mittels der *Taylor*schen Formel. Er sagt, $f = f_0$ ist von der Klasse C^m in A in bezug auf die Funktionen $f_k(\sigma_k \leq m)$, wenn die Funktionen $f_k = f_{k_1,\dots,k_n}$ in A definiert sin für alle n-fachen Indices, deren Indexsumme $\sigma_k = k_1 + \cdots k_n \leq m$ ist, und wenn für irgend zwei Punkte von A gilt:

$$f_{k_1,\dots,k_n}(x'_1,\dots,x'_n) = \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_n \\ \leq m-(k_1+\cdots+k_n)}} \frac{f_{k_1+l_1,\dots,k_n+l_n}(x_1,\cdots,x_n)}{l_1!\dots l_n!}(x'_1-x_1)^{l_1}\dots(x'_n-x_n)^{l_n} + R_{k_1,\dots,k_n}(x'_1,\dots,x'_n;x_1,\dots,x_n).$$

Dabei soll das Restglied folgende Eigenschaft besitzen: Zu jedem Punkt p^0 von A und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für irgend zwei Punkte p und p' von A, deren Entfernung von $p^0 < \delta$ ist, gilt:

$$|R_{k_1,\dots,k_n}(p';p)| \leq r_{pp'}^{m-\sigma_k} \cdot \varepsilon$$

(wobei $r_{pp'}$ die Entfernung der Punkte p, p' bedeutet).

Ist $f(x)$ in einem Gebiet definiert, so sind die f_k die ensprechenden partiellen Ableitungen von f.

Verf. beweist nun den folgenden bemerkswerten Satz: Ist $f = f_0$ von Klasse C^m (m endlich oder unendlich) in A in bezug auf die Funktionen f_k $(\sigma \leq m)$, dann existiert eine Funktion F der Klasse C^m in E_n, so daß F und seine k-ten partiellen Ableitungen $(\sigma_k \leq m)$ in A mit f bzw. f_k übereinstimmen, und daß außerdem F in $E_n - A$ analytisch ist.

Dies wird vom Verf. u. a. noch dahin verallgemeinert, daß F auch in den isolierten Punkten von A analytisch wird.

Der Beweis beruht zum Teil auf einer auch an sich interessanten Verallgemeinerung des *Weierstraß*schen Approximationssatzes: Es werden stetige Funktionen (mit ihren Ableitungen) in offenen Mengen O durch analytische Funktionen approximiert, wobei die Approximation bei Annäherung an den Rand von O immer besser wird.

Reviewer: Rosenthal, A., Prof. (Heidelberg)

Full Text: DOI