Ore, O.
On the foundation of abstract algebra. I. (English) JFM 61.0111.09
Ann. of Math. (2) 36, 406-437 (1935).

In zahlreichen Gebieten der modernen Algebra treten Strukturuntersuchungen auf, die an sich rein mengentheoretischer Natur sind. Daher unternimmt es Verf., diese mengentheoretischen Betrachtungen in abstrakter Form durchzuführen, um auf diese Weise die enge Beziehung und Ähnlichkeit gewisser algebraischer Untersuchungen besonders klar herauszustellen.

In einem System Σ mathematischer Elemente $A, B, C, \dots$ ist eine Enthaltenseinsbeziehung $A > B$ (A ist in B enthalten) zwischen den Elementen erklärt durch das folgende Axiom:

(α_1) $\qquad A > A; \quad$ aus $\quad A > B > C \quad$ folgt $\quad A > C$.

Damit kann *Gleichheit* durch $A > B$ und $B > A$ einwandfrei erklärt werden. Weiter werden *Durchschnitt* und *Vereinigung* zweier Elemente erklärt durch die Axiome:

(α_2) Zu jedem Paar $A, B \in \Sigma$ gibt es ein Element $D = (A, B) \in \Sigma$, sodaß

$$D \leqq A, \ \ D \leqq B$$

und für jedes D_1, das die gleichen Eigenschaften besitzt, $D_1 \leqq D$ gilt.

(α_3) Zu jedem Paar $A, B \in \Sigma$ gibt es ein Element $V = [A, B] \in \bar{\Sigma}$, sodaß

$$V \geqq A, \ \ V \geqq B$$

und für jedes V_1, das die gleichen Eigenschaften besitzt, $V_1 \geqq V$ gilt. Ein System, das $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ genügt, nennt Verf. eine *Struktur*, ein Teilsystem, das für sich diesen Axiomen genügt, eine Teilstruktur. Offenbar bilden die Elemente S, für die $A \geqq S \geqq B$, eine *Teilstruktur zwischen* A und B, die mit A/B bezeichnet wird.

Ein Element O, das
$$[A, O] = O \ \text{ für jedes } \ A \in \Sigma$$
genügt, heißt Allelement, ein Element E, das

$$(A, E) = E \ \text{ für jedes } \ A \in \Sigma$$

genügt, heißt Einselement. Wenn sie existieren, sind sie eindeutig bestimmt.

Durch zusätzliche Axiome werden nun weiterhin die algebraisch wichtigen Strukturen gekennzeichnet.

Nennt man eine Struktur Σ eine *Kette*, wenn für irgend zwei Elemente $A, B \in \Sigma$ eine der Beziehungen $A < B$, $A = B$, $A > B$ besteht, so treten als vor allem wichtige Zusatzaxiome die folgenden Endlichkeitsbedingungen auf:

(β_1) Die Endlichkeitsbedingung für aufsteigende Ketten: Eine Folge

$$A = A_0 > A_1 > A_2 > \cdots$$

mit $A_\varkappa > B$ besteht nur aus endlich vielen Gliedern.

(β_2) Die Endlichkeitsbedingung für absteigende Ketten: Eine Folge

$$B = B_0 < B_1 < B_2 < \cdots$$

mit $B_\varkappa < A$ besteht nur aus endlich vielen Gliedern, Axiome, die bekanntlich in der allgemeinen Idealtheorie eine fundamentale Rolle spielen. Es treten auch andere Zusatzaxiome auf, die andere wichtige algebraische Bereiche charakterisieren:

*Dedekind*sche Axiom: Aus der Beziehung $A < C < [A, B]$ folgt stets $C = [A, (B, C)]$. Arithmetisches Axiom: Es gilt stets $(A, [B, C]) = [(A, B), (A, C)]$. Definiert man Homomorphismus, Isomorphismus von Strukturen wie üblich, so hat man Homomorphismus in Beziehung auf den Durchschnitt bzw. in Beziehung auf die Vereinigung bzw. in Beziehung auf beide zu unterscheiden. Alle Homomorphismen erhalten die Enthaltenseinsbeziehung. In *Dedekind*schen Strukturen gilt der Satz: $A/(A,B)$ ist isomorph zu $[A,B]/B$ in beiden Beziehungen. Nennt man daher ein Element A/B prim über B, wenn kein Element zwischen A, B liegt, und eine Kette $A - B$ von bzw. primen Elementen Hauptreihe, so gilt als Hauptsatz in *Dedekind*schen Strukturen der Satz, daß, falls überhaupt zwischen A und B eine endliche Hauptreihe existiert, alle Hauptreihen von gleicher Länge sind und auseinander durch Transpositionen hervorgehen. Man kann nun zu einer Struktur eine Quotientstruktur definieren, indem man ein formales Zeichen A/B durch die Regel

$$(A/B,\ A_1/B_1) = (A, A_1)/(B, B_1),$$
$$[A/B,\ A_1/B_1] = [A, A_1]/[B, B_1]$$

definitorisch festlegt. Das System aller A/B bildet wieder eine Struktur $\bar{\Sigma}$ Quotientstruktur von Σ.

Definiert man nun ein Produkt ($\times$) durch

$$A/C = A/B \times B/C,$$

so erhält man eine Darstellung

$$\mathfrak{A} = A/B = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_r$$

für eine endliche Hauptreihe mit primen Quotienten $\mathfrak{P}$, und damit in *Dedekind*schen Strukturen für endliche Hauptreihen den *Jordan-Holder*schen Satz. Allgemeiner erhält man in *Dedekind*schen Strukturen den *Schreier*schen Verfeinerungssatz. Man erkennt wohl aus dieser kurzen Angabe den wesentlichen Sinn dieser axiomatischen Untersuchungen und ihrer Weiterungen, auf die im Einzelnen hier nicht eingegangen werden kann. (II.)

Reviewer: Specht, W., Dr. (Breslau)

Full Text: DOI