Rellich, F.

**Störungstheorie der Spektralzerlegung. III: Analytische, nicht notwendig beschränkte Störung.** (German) JFM 65.0510.01

Math. Ann., Berlin, 116, 555-570 (1939).

In einer früheren Arbeit des Verf. (Math. Ann., Berlin, 113 (1936), 677-685; JFM 62.0453.*) wurde bewiesen, daß die isolierten Punkteigenwerte $\lambda(\varepsilon)$ und die zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi(\varepsilon)$ eines *beschränkten* symmetrischen linearen Operators $A(\varepsilon)$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\varepsilon = 0$ analytisch von $\varepsilon$ abhängen, sobald $A(\varepsilon)x$ für jedes $x \prec \mathfrak{H}$ regulär, d. h. durch eine konvergente Reihe $A(\varepsilon)x = A_0x + \varepsilon A_1x + \varepsilon^2 A_2x + \cdots$ darstellbar ist, und daß für solche Operatoren auch die Vielfachheit dieser Eigenwerte beim Übergang vom "ungestörten" Operator $A(0) = A_0$ zum "gestörten" $A(\varepsilon)$ in einer dort genauer präzisierten Art und Weise ungeändert bleibt.

In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß diese Aussagen für *nichtbeschränkte* symmetrische Operatoren $A(\varepsilon)$, für die $A(\varepsilon)u$ bei beliebigem $u$ ihres Definitionsbereiches $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ regulär ist, im allgemeinen zwar nicht mehr zutreffen, daß sie jedoch in vollem Umfang in Geltung bleiben, wenn $A(\varepsilon)$ überdies so beschaffen ist, daß es einen den ganzen Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ eineindeutig auf $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ abbildenden beschränkten, in einer gewissen Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulären Operator $U(\varepsilon)$ gibt, für den $A(\varepsilon)U(\varepsilon)$ ebenfalls regulär und beschränkt ist (Operatoren dieser Art werden als regulär schlechthin bezeichnet; für beschränkte Operatoren fällt dieser Regularitätsbegriff mit dem bereits in der zitierten Arbeit eingeführten zusammen), und wenn außerdem $A(\varepsilon)$ in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ selbstadjungiert ist (wozu es übrigens genügt, daß $A(0)$ in $\mathfrak{A}(0)$ selbstadjungiert ist).

Es werden weitere Beispiele *nicht-regulärer* Operatoren angeführt (z. B. der die Wellengleichung des Zeeman-Effektes definierende Differentialoperator), bei denen trotzdem Regularität der Eigenwerte und Eigenfunktionen in $\varepsilon$ statthat, die Invarianz der Vielfachheit der Eigenwerte dagegen nicht mehr besteht.

Ferner wird ein praktisch gut brauchbares Kriterium der Regularität für solche symmetrische Operatoren $A(\varepsilon)$ angegeben, die für alle $\varepsilon$ einer bestimmten Umgebung von $\varepsilon = 0$ einen von $\varepsilon$ unabhängigen Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ besitzen: $A(\varepsilon)$ ist regulär, wenn 1) $A(\varepsilon)u$ für jedes $u \prec \mathfrak{A}$ regulär ist, also $A(\varepsilon)u = A_0u + \varepsilon A_1u + \varepsilon^2 A_2u + \cdots$ gilt, 2) $A(0)$ in einem solchen Bereich $\mathfrak{A}_0 > \mathfrak{A}$ selbstadjungiert ist, für den jedes $u \prec \mathfrak{A}_0$ durch eine Folge $u_\nu \prec \mathfrak{A}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und zugleich auch $A(0)u$ durch $A(0)u_\nu$ mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden kann, und 3) $|A_nu| \leqq p^n\{|u| + |A_0u|\}$ mit $p > 0$ gilt. $A(\varepsilon)$ ist dann sogar zu einem in $\mathfrak{A}_0$ regulären und selbstadjungierten Operator fortsetzbar. (Für solche Operatoren lassen sich übrigens auch die in der Störungsrechnung üblichen Methoden zur Bestimmung der gestörten Eigenwerte und -funktionen mit Hilfe der Ansätze $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + \cdots$ und $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot \varepsilon + \cdots$ in Anwendung bringen.) Ein ähnliches Kriterium wird schließlich noch für halbbeschränkte Operatoren hergeleitet.

Reviewer: Schoblik, F., Dr. (Brünn)



**Full Text:** DOI

## References:

[1] Math. Annalen113 (1937), S. 610.

[2] Über die Grundtatsachen aus der Theorie der linearen Operatoren vgl. M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, New York 1932.

[3] E. Hellinger und O. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Ann.69 (1910), insb. S. 318 und S. Banach loc. cit. I. Mitteilung 7). · Zbl 41.0381.01 · doi:10.1007/BF01456325

[4] Vgl. M. H. Stone, insbesondere S. 61.

[5] Er ist enthalten in théorème 5 (Seite 41) von S. Banach. Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932.

[6] Über den Begriff des regulären beschrankten Operators vgl. Def. 3 und Def. 3' der I. Mitteilung, Math. Annalen113 (1937), S. 608. Insbesondere ist {\(\epsilon\)} stets ein reeller Parameter.

[7] Zum Begriff des reziproken Operators vgl. den Anfang von {\S} 1.

[8] Vgl. Def. 1 und 2 der I. Mitteilung, S. 607.

[9] Vgl. M. H. Stone,, insbesondere S. 428.

[10] DieStetigkeit des diskreten Spektrums folgt aus dem Satz 8 der II. Mitteilung (Math. Annalen113, insb. S. 685).

[11] Häufig unter Benutzung von Bemerkung 1 und 3.

[12] Hierzu vgl. K. Friedrichs, Math. Annalen109, S. 465–487.